Über die Fortpflanzung von Signalen in dispergierenden Systemen

Erster Teil: Allgemeine Grundlagen
Kontinuierliche Systeme ohne Verluste

Von der
Technischen Hochschule zu Breslau
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs
genehmigte

Dissertation

Vorgelegt von

Dipl.-Ing. Hans Georg Baerwald
aus Breslau

Referent: Prof. Dr. F. Noether
Korreferent: Prof. Dr. E. Waetzmann

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Februar 1930

1 9 3 0

Johann Ambrosius Barth in Leipzig

Sonderdruck aus „Annalen der Physik“
5. Folge, Band 6, Heft 3. 1930

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig 119

Inhaltsübersicht: I. Fragestellung. Die Grundeigenschaften dispergierender, insbesondere kontinuierlicher Systeme: § 1. Fragestellung und Literaturangaben, § 2. Definition und Fortpflanzungsmaße $k(\omega)$ der drei Systemtypen, § 3. Verlustarme Systeme. Allgemeine Eigenschaften von $R(\omega)$. Grenzfrequenzen, D- und S-Gebiete, § 4. Die Fundamentalsätze über kontinuierliche Dispersionssysteme, § 5. Funktionentheoretischer Ansatz. Signale mit rationalem Spektrum. — II. Mathematische Hauptdurchführung; Entwicklung der allgemeinen Theorie für verlustfreie Kontinua: § 6. Der Grad von $k(\omega)$ als Latenzzeitkriterium. Der „Vorlauf", § 7. Prinzipielles über die zu verwendende Integrationsmethode, § 8. Gruppengeschwindigkeit und „Signalfrequenzen"; Berechnung der Einzelterme, § 9. Allgemeine Diskussion der Sattelpunktsbahnen als Bild des Signalablaufs. Bedeutung des einzelnen D-Gebietes; die „Quasilatenzzeit", § 10. Fortpflanzung von Signalen mit Hauptfrequenz; die Signalzeit. „Hauptübergang (Aufschaukelzeit)" und „Quasilatenzübergang". Versagen der abgekürzten Sattelpunktsintegration, § 11. Entwicklung der verallgemeinerten Methode der Sattelpunktsintegration, § 12. Anwendung: Berechnung von Haupt- und Quasilatenzübergang; Aufschaukelzeit und Frontverflachung, § 13. Die Signalgeschwindigkeit als asymptotischer Begriff; „lange" und „kurze" Distanzen; Dispersionsmaß. Andeutende Behandlung kurzer Distanzen, § 14. Übertragung auf verlustfreie Kontinua ohne Latenzzeit (Quasistationäre Näherung). — Zusammenfassung.

I. Fragestellung. Die Grundeigenschaften dispergierender, insbesondere kontinuierlicher Systeme

§ 1. Fragestellung und Literaturangaben

Die ursprüngliche Anregung zu dieser Arbeit gaben zwei spezielle technische Fragen: Die zeitliche Verzerrung von hochfrequent modulierten elektrischen Wellen, die beim drahtlosen

Fernsehen benutzt werden, beim Durchgang durch ionisierte Schichten und die Frontverflachung von Wanderwellen in Spulen mit Windungskapazität[1], [2]). Die mannigfachen Analogien, die sich bei der Durchführung dieser beiden recht verschiedenartigen Aufgaben zeigten, gaben jedoch Veranlassung zu einer viel allgemeineren Fragestellung: Die charakteristischen Verzerrungserscheinungen von nichtstationären Vorgängen (Signalen), die sich in linear-homogenen dispergierenden Systemen von sehr allgemeiner Art ausbreiten, sollten in einheitlicher Form dargestellt werden; und zwar nicht nur für kontinuierliche Systeme, sondern auch für diskontinuierliche [zu denen z. B. die Wagnerschen Kettenleiter[3]) gehören] sowie für gewisse Kombinationen von beiden, wie sie z. B. in Pupinleitungen oder akustischen Filtern[4]) verwirklicht sind.

Die Durchführbarkeit dieses sehr allgemeinen Problems und damit die Möglichkeit, für gewisse Aufgaben der Physik und Technik generelle Lösungen anzugeben, die die mathematische Diskussion im Einzelfall entbehrlich machen, beruht, wie sich zeigte, darauf, daß den genannten Dispersionssystemen gewisse physikalische Grundeigenschaften gemeinsam sind: die Art der Frequenzabhängigkeit ihres Fortpflanzungsmaßes und damit die abwechselnde Folge von „Durchlässigkeits- und Sperrgebieten". Daraus können einige allgemeine Sätze über die Frequenzabhängigkeit der Gruppengeschwindigkeit bzw. funktionentheoretisch ausgedrückt: die Lage der Sattelpunkte in der Frequenzebene gefolgert werden, die es gestatten, die Durchführung des Problems mittels der verallgemeinerten[5]) Methode der Sattelpunktsintegration[6]) in der Hauptsache auf das eines einzigen Durchlässigkeitsgebietes zurückzuführen.

In den Vordergrund treten bei der Durchführung der gestellten Aufgabe gewisse allgemeine, für die Dispersionsverzerrungen von Signalen charakteristische Begriffe wie die der „Signalgeschwindigkeit", „Aufschaukelzeit" usw.; besonders

1) Mathematischer Ansatz: L 17, S. 285; dort weitere Literatur.
2) Bezeichnung L verweist auf das Literaturverzeichnis.
3) L 35, 37, 39.
4) L 30, 31; L 15.
5) Vgl. § 11. Dieser kann für sich gelesen werden.
6) L 8; L 7, S. 435; L 20.

wichtig wird es daher sein, diese in zweckmäßiger und ausreichender Weise festzulegen, zumal verschiedene Autoren hierüber zu z. T. widersprechenden Aussagen gelangen. Dazu sei hingewiesen auf Sommerfeld[1]) und Brillouin[2]); dieser kommt u. a. zu dem Ergebnis, daß in einem Gebiet selektiver Absorption eines optischen Mediums, das einem kurzen Sperrgebiet äquivalent ist, die Signalzeit zwischen zwei Maximalwerten bis zur Latenzzeit abnimmt, während sie nach Küpfmüller[3]) bei Annäherung an eine Grenzfrequenz unendlich wird. Beide Autoren stellen übereinstimmend fest, daß in verlustfreien Systemen unter der Signalgeschwindigkeit sinnvoll die Gruppengeschwindigkeit verstanden werden muß. Daß sich indessen verlustarme Systeme hierin z. T. ganz anders verhalten können, wird bei Pollaczek[4]) evident, der bei einem speziellen, schwach dispergierenden Kontinuum, dem homogenen Kabel, einerseits feststellt, daß eine eigentliche „Signalzeit" nicht einwandfrei definiert, also „willkürlich" ist (vgl. L 19, S. 62), andererseits findet, daß bei Signalen mit schließlich stationärer Frequenz der flüchtige Signalanteil den stationären u. U. erheblich übertreffen kann, was zu einer vom verlustfreien Fall abweichenden Signalzeit führt. Derselbe Autor kommt ferner[5]) zu speziellen Angaben über Einschwingzeit und asymptotische Latenzzeit vielgliedriger Spulenketten. — Küpfmüller[6]) unterscheidet Systeme mit überwiegender „Dämpfungs"- bzw. „Phasenverzerrung" und gibt für beide Näherungsformeln an, stellt jedoch fest, daß sich diese Unterscheidung in allgemeineren Fällen nicht immer durchführen läßt. Der gleiche Autor stellt die Behauptung auf[7]), daß die Berechnung der Einschwingvorgänge in allgemeinen Systemen, die den Gegenstand der folgenden Ausführungen bildet, nicht in geschlossener Form durchführbar sei.

---

1) L 25, 26.

2) L 1. Vgl. hierzu auch L 9, wo ein sehr einfaches technisches Beispiel der Signalfortpflanzung in einem dispergierenden System in engem Anschluß an L 1 behandelt wird.

3) L 13, S. 65.

4) L 19.

5) L 20.

6) L 14.

7) L 13, S. 59 und 61.

Die Literaturangaben erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Insbesondere waren mir leider die einschlägigen amerikanischen Arbeiten, speziell von J. R. Carson, nicht zugänglich, mit Ausnahme seines Buches über die Heavisidesche Operatorenrechnung[1]), auf dessen Literaturzusammenstellung verwiesen sei. Dort wird allerdings im allgemeinen der Behandlung mittels reeller Integrale in Form der Operatorengleichung bzw. der Laplaceschen Integralgleichung der Vorzug vor dem hiermit äquivalenten komplexen Fourierintegral und der funktionentheoretischen Methode gegeben; bei den hier behandelten allgemeinen Fragen ist diese aber fraglos allen rein reellen Integrationsprozessen überlegen[2]).

Im folgenden soll zuerst der allgemeine Ansatz gegeben und die grundlegenden Eigenschaften der behandelten dispergierenden Systeme, zunächst speziell der kontinuierlichen, formuliert werden (§§ 2 bis 5). Darauf wird die Theorie der Signalfortpflanzung in verlustfreien Kontinuen mit Latenzzeit durchgeführt (§§ 6 bis 13) und hierbei die allgemeinen Begriffe der Signalzeit, Aufschaukelzeit, Quasilatenzzeit usw. entwickelt, wobei es notwendig sein wird, die Methode der Sattelpunktsintegration zu verallgemeinern (§ 11); diese Ergebnisse werden dann auf Kontinua ohne Latenzzeit erweitert (§ 14). — In einer anschließenden Arbeit soll die Theorie auf verlustarme Kontinua erweitert werden und später auch auf diskontinuierliche Systeme (symmetrische Vierpolketten). Des weiteren ist eine Zusammenstellung der Ergebnisse und deren Anwendung zur Lösung der eingangs genannten technischen Aufgaben beabsichtigt.

§ 2. Definition und Fortpflanzungsmaße $k(\omega)$ der drei Systemtypen

Die Grundgleichungen der hier untersuchten homogenen Systeme, die, wie vorausgesetzt sei, keine Elemente mit negativer Energiedissipation (negative Widerstände) enthalten, sind lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, und zwar partielle hyperbolische im Fall von kontinuierlichen, Systeme von gewöhnlichen mit Verknüpfungsbedingungen im Falle von

1) L 3.
2) Vgl. auch L 3, S. 76 und S. V.

diskontinuierlichen und Kombinationen von beiden im Falle gemischter Systeme. Sie sind von erster Ordnung simultan für die zwei stets vorkommenden abhängigen Variablen (z. B. Spannung und Strom, elektrischer und magnetischer Vektor, Druck und Mediumstrom usw.) bzw. bei Elimination einer derselben von zweiter Ordnung. Bekanntlich läßt sich für solche stets eine partikuläre Lösung in Form einer fortschreitenden ebenen Welle angeben:

$$P^{(\omega)}(x,t) = e^{i(\omega t - k x)}, \tag{1}$$

worin x die Fortschreitungskoordinate, t die Zeit, ω die (komplexe) Frequenz und

$$k = k(\omega) \quad \text{bzw.} \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{2}$$

das komplexe Fortpflanzungsmaß bzw. die Phasengeschwindigkeit und Wellenlänge bedeuten. Im Fall diskontinuierlicher Systeme tritt an Stelle von x der ganzzahlige Stellenzeiger n, doch sei der Einheitlichkeit halber die Benennung x beibehalten. Unter P wird allgemein eine der beiden abhängigen Variablen verstanden, für die andere, I, ist dann die zu (1) gehörige Lösung:

$$I^{(\omega)}(x,t) = \frac{1}{\mathfrak{Z}(\omega)} e^{i(\omega t - k x)}. \tag{3}$$

Die hierin auftretende Funktion $\mathfrak{Z}(\omega)$ sei (in Übernahme der elektrischen Ausdrucksweise) allgemein als „Wellenwiderstand" bezeichnet. Die eng miteinander zusammenhängenden Funktionen $k(\omega)$ und $\mathfrak{Z}(\omega)$ geben als „Frequenzcharakteristik" (vgl. L 14) die Eigenschaften eines Systems völlig wieder, ohne jedoch direkte Aussagen über die Fortpflanzung nichtstationärer Vorgänge zu ermöglichen; dabei wird von den trivialen Fällen in denen sich k/ω und $\mathfrak{Z}$ auf Konstanten reduzieren, abgesehen; die betrachteten Systeme dispergieren also im Sinne der Optik.

Zuerst muß nun der Bereich der hier untersuchten Dispersionssysteme umgrenzt werden. Es wird sich dabei zeigen, daß, unter $R(\omega)$ allgemein rationale Funktionen verstanden, für die Fortpflanzungsmaße der drei Systemtypen, der kontinuierlichen, diskontinuierlichen und gemischten Systeme, folgende Beziehungen gelten:

(4) 1. $k = \sqrt{R(\omega)}$;

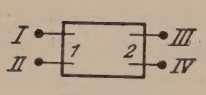
(5) 2. $\cos k = R(\omega)$ bzw. $\sin \frac{k}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}[1 - R(\omega)]}$;

(6 a) 3. $\cos k = R_1(\omega) \cos R_3(\omega) + R_2(\omega) \sin R_3(\omega) \equiv P(\omega)$,

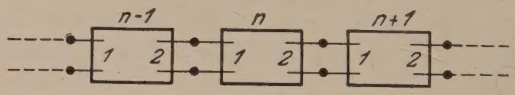
(6 b) speziell: $\cos k = R_1(\omega) \cos a\,\omega + R_2(\omega) \sin a\,\omega$ mit $a = \text{const}$

im Falle, daß die kontinuierlichen Anteile nicht dispergieren.

Wir beginnen, um diese Ansätze kurz zu erläutern, mit den diskontinuierlichen Systemen. Hierunter sollen zunächst allgemein Ketten von passiven Vierpolen [1]) (allgemeine Kettenleiter) verstanden werden. Die Klemmen und Seiten eines Vierpols



Vierpol
Fig. 1a



Vierpolkette
Fig. 1b

seien nach Fig. 1a bezeichnet; Fig. 1b zeigt dann das $(n-1)te$ bis $(n+1)te$ Glied einer Kette. Wir schreiben die Stromspannungsgleichungen eines Vierpols für den eingeschwungenen Zustand der Frequenz ω in der üblichen Form:

(7)
$$\begin{cases} P_1^{(\omega)} = \mathfrak{A}(\omega)\, P_2^{(\omega)} + \mathfrak{B}(\omega)\, I_2^{(\omega)} \\ I_1^{(\omega)} = \mathfrak{C}(\omega)\, P_2^{(\omega)} + \mathfrak{D}(\omega)\, I_2^{(\omega)} \end{cases};$$

hierin sind P_1, I_1 die primären, P_2, I_2 die sekundären Stromspannungsgrößen und die $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, rationale Funktionen von ω, die wegen des Nichtvorhandenseins von inneren Energiequellen der Bedingung

(8)
$$\begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{vmatrix} = 1$$

genügen. Wendet man (7) der Reihe nach auf drei aufeinanderfolgende Glieder der Kette an, so kann man darin wahlweise die I- oder P-Größen eliminieren und erhält so für beide die lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung:

(9) $$\Delta\Delta u_n \equiv u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n = (\mathfrak{A} + \mathfrak{D} - 2) \cdot u_n,$$

1) Für das Folgende sei auf zusammenfassende Arbeiten über Vierpole hingewiesen, z. B.: L 6, L 32, L 33, L 40.

worin u_n allgemein für $P_n^{(\omega)}$ oder $I_n^{(\omega)}$ gesetzt ist; diese hat unabhängige Partikulärlösungen, welche sich als fort- bzw. rückschreitende Wellen auffassen lassen:

$$P_n^{(\omega)} = P_0^{(\omega)} e^{\mp i n k(\omega)}; \quad I_n^{(\omega)} = I_0^{(\omega)} e^{\mp i n k(\omega)} \tag{10}$$

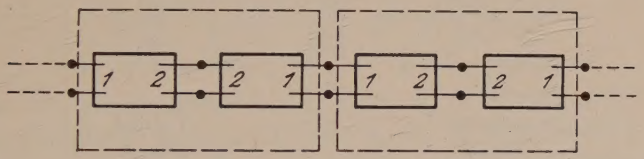
mit

$$\cos k = \frac{\mathfrak{D} + \mathfrak{A}}{2}, \tag{11}$$

was der allgemeinen Form (5) entspricht. Als zugehörige Wellenwiderstände findet man leicht:

$$\mathfrak{Z}_{I,II} = \frac{\mathfrak{B}}{e^{\pm ik} - \mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{B}}{\frac{\mathfrak{D} - \mathfrak{A}}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{\mathfrak{D} + \mathfrak{A}}{2}\right)^2}}. \tag{12}$$

Wie sich zeigen wird, bedeutet die Beschränkung auf den wichtigen Spezialfall symmetrischer Vierpole als Kettenglieder



Vierpolkette in Wellenschaltung
Fig. 2

eine große Vereinfachung. [Hierzu kommt man z. B., wenn man die Kette wie in Fig. 2 aufbaut; denn dann ergibt die Zusammenfassung je zweier aufeinanderfolgenden Vierpole stets einen symmetrischen.] Dann ist:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{D}; \tag{13}$$

unter Berücksichtigung von (8) enthält der Vierpol damit nur zwei unabhängige Funktionen. Die Vereinfachung gegenüber der allgemeinen Vierpolkette liegt in folgendem: Die $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ und also auch $\cos k$ lassen sich dort bekanntlich nicht für alle Frequenzen rational durch realisierbare Impedanzen (passive Zweipole) ausdrücken, z. B. die primären und sekundären Leerlauf- und Kurzschlußwiderstände:

$$\mathfrak{Z}_{1l} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}; \quad \mathfrak{Z}_{2l} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}}; \quad \mathfrak{Z}_{1k} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}; \quad \mathfrak{Z}_{2k} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}.$$

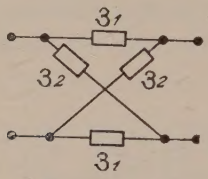
Bei symmetrischen Vierpolen ist das indes stets möglich, da nach Cauer[1]) jeder solche einem Kreuzglied (Fig. 3) mit zwei realisierbaren Impedanzen $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ äquivalent ist; diese stehen mit den Vierpolgrößen in der Beziehung:

$$(14) \qquad \mathfrak{Z}_l = \frac{1}{2}(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2);\ \frac{1}{\mathfrak{Z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1} + \frac{1}{\mathfrak{Z}_2}\right).$$

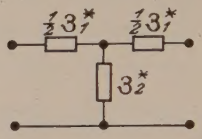
Daraus ergibt sich leicht für die Kettengrößen:

$$(15) \qquad \cos k = \frac{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2};\ \mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2}.$$

Da man über die besonderen Eigenschaften von Funktionen, die realisierbare Impedanzen darstellen, Bescheid weiß[2]), ist nun auch das Verhalten von $k(\omega)$ in vielen wichtigen Punkten bekannt; auf dieser Kenntnis beruht letzten Endes die später



Kreuzglied
Fig. 3



T-Glied
Fig. 4

zu entwickelnde Theorie der diskontinuierlichen Systeme." — Die Kreuzgliedleiter sind auch als „Kettenleiter 3. Art" bezeichnet worden.[3]) Die gewöhnlichen Kettenleiter (1. oder 2. Art), der Gegenstand der ursprünglichen Wagnerschen Theorie[4]) von denen Fig. 4 ein Glied zeigt, und für deren Kettenmaße eine elementare Rechnung

$$(16) \qquad \cos k = 1 + \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{Z}_1^*}{\mathfrak{Z}_2^*};\ \mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\mathfrak{Z}_1^*\,\mathfrak{Z}_2^*}{1 + \frac{1}{4}\frac{\mathfrak{Z}_1^*}{\mathfrak{Z}_2^*}}}$$

liefert, stellen eine weniger allgemeine Klasse von Systemen dar als die Kreuzgliedleiter: Denn die Impedanzen äquivalenter, d. h. für alle Frequenzen gleiche Leerlauf- und Kurzschluß-

1) L 5.
2) Vgl. L 4.
3) Vgl z. B. L 39.
4) L 35, 37, 39.

impedanzen besitzender Gebilde nach Figg. 3 und 4 stehen, wie man leicht zeigt, in den Beziehungen:

$$(17) \qquad \begin{cases} \mathfrak{Z}_1^* = 2\,\mathfrak{Z}_1 \\ \mathfrak{Z}_2^* = \frac{1}{2}(\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1) \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} \mathfrak{Z}_1^* &= 2\,\mathfrak{Z}_2 \\ \mathfrak{Z}_2^* &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2). \end{aligned}$$

Bedeuten also $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ beliebige passive Zweipole, so ist $(\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2)$ oder $\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1)$ im allgemeinen Falle nicht mittels positiver Kapazitäten, Induktivitäten und Widerstände realisierbar (vgl. z. B. L 2, L 11, L 4!); mithin gibt es zwar zu jedem Glied 1. oder 2. Art ein äquivalentes Kreuzglied, aber nicht umgekehrt.

Bei der Definition der kontinuierlichen Dispersionssysteme gehen wir von optischen Medien aus. Nach der Drudeschen Dispersionstheorie[1]) wird hier:

$$(18) \qquad k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{a_\varkappa^2}{\omega^2 - 2\,i\,\delta_\varkappa\,\omega - \alpha_\varkappa^2}}$$

[c = Lichtgeschwindigkeit, $\alpha_\varkappa$ bzw. $\delta_\varkappa$ = Eigenfrequenz bzw. Eigendämpfung des $\varkappa$ten Terms; $a_\varkappa$, $\alpha_\varkappa$, $\delta_\varkappa$ reell positiv]. Dies entspricht der Form (4); speziell ist hier $k(\omega)$ vom Grade 1, und im verlustfreien Grenzfall: $\delta_\varkappa \longrightarrow 0$ ist $R(\omega)$ gerade und für positiv reelle ω zwischen je zwei Polen monoton wachsend. – Eine Verallgemeinerung hiervon bringt der allgemeine „homogene Kettenleiter". Der einfachste Fall eines solchen ist eine homogene Telegraphenleitung mit gewisser Induktivität, Kapazität, Ohmschem Widerstand und Ableitung pro Längeneinheit. Im allgemeinen Fall wird es sich statt dessen um eine beliebige verteilte Impedanz $\mathfrak{Z}_1(\omega)$ und verteilten Leitwert $1/\mathfrak{Z}_2(\omega)$ handeln[2]); das bedeutet im Gegensatz zu Diskontinuen schon die allgemeine Klasse von kontinuierlichen Systemen, da kontinuierliche Kreuzgliedleiter nicht realisierbar bzw. nicht allgemeiner sind. Man erhält für sie aus den Maxwellschen Gleichungen[2]) die beiden Differentialgleichungen:

---

1) Vgl. z. B. L 10, S. 93.

2) Inwieweit es sich bei diesen Fiktionen nur um quasistationäre Näherungen der Maxwellschen Theorie handelt, soll an dieser Stelle noch unerörtert bleiben.

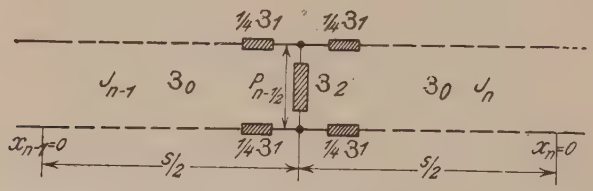
$$(19)\quad \begin{cases} -\dfrac{dI^{(\omega)}}{dx} = \dfrac{P^{(\omega)}}{\mathfrak{Z}_2}; \quad -\dfrac{dP^{(\omega)}}{dx} = \mathfrak{Z}_1 \cdot I^{(\omega)} \\ \text{(Telegraphengleichungen) bzw. } \dfrac{d^2P^{(\omega)}; I^{(\omega)}}{dx^2} = \dfrac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2} P^{(\omega)}; I^{(\omega)} \end{cases}$$

mit den (10) entsprechenden Partikulärlösungen:

$$(20)\quad \begin{cases} P^{(\omega)}(x) = P_0^{(\omega)} e^{\mp i x k(\omega)}; \; I^{(\omega)}(x) = \dfrac{P_0^{(\omega)}}{\mathfrak{Z}(\omega)} e^{\mp i x k(\omega)} \text{ und} \\ k^2 = -\dfrac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2}, \; \mathfrak{Z}^2 = \mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2; \end{cases}$$

die Beziehung (4) ist also auch hier erfüllt.

Es ist selbstverständlich, daß alle bisherigen Definitionen sich unmittelbar auf mechanische, akustische usw. Systeme übertragen lassen, da dort der Begriff der Impedanz die analoge



Glied eines gemischten Systems
Fig. 5

Bedeutung hat, wir bleiben aber der Einfachheit halber bei der elektrischen Terminologie. In diesem Sinne sollen unter gemischten Systemen Ketten von Gebilden verstanden werden, wie sie Fig. 5 zeigt. Bezeichnet man Fortpflanzungsmaß und Wellenwiderstand der kontinuierlichen Abschnitte mit $k_0(\omega)$ und $\mathfrak{Z}_0(\omega)$, so kann man die längs des $n$ten Abschnitts veränderlichen Größen in Form hin- und hergehender Wellen darstellen:

$$P_n^{(\omega)} = P_n^{+(\omega)} \cdot e^{-ik_0 x_n} + P_n^{-(\omega)} \cdot e^{+ik_0 x_n};$$

$$I_n^{(\omega)} = \frac{1}{\mathfrak{Z}_0}\left(P_n^{+(\omega)} \cdot e^{-ik_0 x_n} - P_n^{-(\omega)} \cdot e^{+ik_0 x_n}\right),$$

wobei x zweckmäßig von der Mitte des jeweiligen Abschnittes aus gemessen ist. Durch Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze auf die Verknüpfungsstellen mit den konzentrierten Impedanzen $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$ erhält man zwei lineare Beziehungen zwischen

den Amplituden in benachbarten Abschnitten und damit Rekursionsformeln zwischen $(n-1)$ und n, die unabhängig vom Stellenzeiger gelten. Diese sind wie (9) und (19) mittels Exponentialansatzes lösbar, und man erhält so für das Fortpflanzungsmaß des gemischten Systems:

$$(21\,a)\quad \begin{cases} \cos k = \left(1+\frac{1}{2}\frac{v_1}{v_2}\right)\cos k_0 s + i\,\frac{v_1}{2}\left(1+\frac{1}{v_1 v_2}+\frac{1}{4}\frac{v_1}{v_2}\right)\sin k_0 s \\ \qquad \text{mit } v_1 = \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_0},\quad v_2 = \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_0}, \end{cases}$$

also allgemein die Form (6a); speziell im Fall dispersionsfreier Kontinua wird

$$(21\,b)\quad \begin{cases} \cos k = \left(1+\frac{1}{2}\frac{v_1}{v_2}\right)\cos\frac{s}{c}\omega \\ \qquad + i\,\frac{v_1}{2}\left(1+\frac{1}{v_1 v_2}+\frac{1}{4}\frac{v_1}{v_2}\right)\sin\frac{s}{c}\omega \end{cases}$$

(vgl. Fig. 5), wenn c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in diesen ist, also Form (6b). Oft sind als konzentrierte entweder nur Längs- oder nur Querimpedanzen vorhanden; das erste ist z. B. der Fall bei Pupinleitungen, das zweite bei akustischen Wellenfiltern (vgl. L 30, 31; L 15) [bei diesen ist unter $\mathfrak{Z}_0$ der „Schallwiderstand“ pro Quadratzentimeter (L 34, S. 570 und 651) zu verstehen]. Damit wird einfacher:

$$(22\,a,\,b)\quad \begin{cases} \cos k = \cos\frac{s}{c}\omega + i\frac{v_1}{2}\sin\frac{s}{c}\omega \\ \text{bzw.}\quad \cos k = \cos\frac{s}{c}\omega + \frac{i}{2\,v_2}\sin\frac{s}{c}\omega\,. \end{cases}$$

§ 3. Verlustarme Systeme. Allgemeine Eigenschaften von $R(\omega)$. Grenzfrequenzen, D- und S-Gebiete

Aus dem Vorangehenden ist ersichtlich, daß $k(\omega)$ und $\mathfrak{Z}(\omega)$ in der komplexen ω-Ebene die gleichen Verzweigungsstellen haben — was sich übrigens direkt aus den Ausgangsdifferentialgleichungen ergibt —, die mit ω_g bezeichnet seien; im folgenden genügt deshalb die Betrachtung von $k(\omega)$. Der Bereich der rationalen Funktionen:

$$(23)\qquad R(\omega) = \frac{Z(\omega)}{N(\omega)}$$

von (4)—(6) ist durch (15), (20), (21) erheblichen Einschränkungen unterworfen, die zu fundamentalen Aussagen führen

werden. Zuvor soll dieser Bereich indessen aus physikalischen Gründen noch in anderer Hinsicht eingeengt werden. Wir werden zunächst verlustfreie Systeme behandeln, später verlustarme, dagegen sind solche mit erheblicher Verlustdämpfung hier ohne Interesse. Unter Verlustarmut wird präziser folgendes verstanden: Die eingeführten Grundimpedanzen $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ bzw. realisierbare Schaltkombinationen aus ihnen sollen keine aperiodischen Eigenfrequenzen haben, speziell die Wurzeln jeder charakteristischen Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{Z}_1(\omega)}{\mathfrak{Z}_2(\omega)} = \lambda$$

mit reellem nicht positivem λ reell oder konjugiert reelle Paare sein:

$$\omega_\lambda = \pm \alpha_\lambda + i\,\delta_\lambda; \tag{24}$$

dabei bedeuten α_λ und δ_λ reelle nicht negative Konstanten, für die

$$\left(\frac{\delta_\lambda}{\alpha_\lambda}\right)^2 \ll 1 \tag{25a}$$

sein soll, also

$$R(\omega) \sim \text{ reell} \tag{26a}$$

bzw. im verlustfreien Fall:

$$\delta_\lambda = 0 \quad \text{und} \quad R = f(\omega^2) = \text{reell}. \tag{25b, 26b}$$

Durch die Forderung (24) werden Systeme mit aperiodischen Bestandteilen ausgeschlossen. Solche können gleichwohl noch „verlustarm" im gewöhnlichen Sinne sein, dispergieren aber im Gegensatz zu den hier behandelten allein vermittelst ihrer frequenzabhängigen Verlustdämpfung, also gar nicht im verlustfreien und nur schwach im verlustarmen Fall. Die Nichteinbeziehung solcher Systeme geschah im Interesse der einheitlicheren Darstellung, da die hier in erster Linie interessierenden charakteristischen Dispersionserscheinungen bei ihnen zurücktreten; prinzipielle Schwierigkeiten würde ihre Mitbehandlung nicht machen.[1])

---

1) Ein einfaches in diesem Sinne aperiodisches System ist z. B. das homogene Kabel (vgl. Pollaczek, L 19) mit

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\left(1 + \frac{R}{i\omega L}\right)\left(1 + \frac{G}{i\omega C}\right)};$$

Aus (15) und (20) resultieren nun einige wichtige Aussagen über die in (4) und (5) eingehenden rationalen Funktionen. Setzen wir zunächst Verlustfreiheit voraus, so haben nach Cauer (L 4, S. 14)[1]) die Grundimpedanzen die allgemeine Form:

$$(27)\quad \mathfrak{Z} = \frac{h}{i\,\omega} \cdot \frac{(\omega^2-\omega_0^2)\,(\omega^2-\omega_2^2)\cdots\cdots(\omega^2-\omega_{2n-2}^2)\,(\omega^2-\omega_{2n}^2)^{\varepsilon}}{(\omega^2-\omega_1^2)\,(\omega^2-\omega_3^2)\cdots\cdots(\omega^2-\omega_{2n-1}^2)},$$

worin $(-1)^{\varepsilon}\cdot h$ und die ω_k reell und positiv und ihre Anordnung

$$(27\,a)\qquad 0 \leqq \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots\cdots < \omega_{2n-1} < \omega_{2n} < \infty$$

ist, sowie

$$(27\,b)\qquad \varepsilon = \begin{cases} 0 \\ \text{oder } +1\,. \end{cases}$$

Im Falle $\varepsilon = 0$ verhält sich $\mathfrak{Z}$ für sehr hohe Frequenzen ($\omega > \omega_{2n}$) kapazitiv[2]), bei $\varepsilon = 1$ induktiv, im Falle $\omega_0 \neq 0$ bzw. $\omega_0 = 0$ gilt das gleiche für $\omega \to 0$. $\frac{\mathfrak{Z}}{i\,\omega}$ wächst für positive ω zwischen je zwei Polen monoton. Der verlustarme Fall in seiner obigen Definition unterscheidet sich nur dadurch, daß die Wurzeln und Pole $\pm\omega_k$ von $\mathfrak{Z}$ kleine positive Imaginärteile δ_k erhalten. Bei den jetzt folgenden Betrachtungen kann man sich auf Verlustfreiheit beschränken, da sich dieselben auf verlustarme Systeme unmittelbar übertragen lassen. Spezielle Folgerungen aus (24)—(27) sind die Spiegelbildlichkeit von $\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2}$ zur reellen Achse sowie die Tatsache, daß $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ keine einfachen, sondern höchstens Doppelwurzeln

---

die Verzweigungsstellen liegen hier bei $i\frac{R}{L}$ und $i\frac{G}{C}$, also im verlustarmen Fall nahe bei 0 bzw. nahe beieinander; daher nur schwache Dispersion. Falls die „Verzerrung" verschwindet: $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$ findet überhaupt keine Dispersion statt.

1) Das Reaktanztheorem (27) war schon vor Cauer bekannt. Es wurde erstmalig ohne Beweis von Campbell (L 2) angegeben und findet sich bei Foster (L 11). Es ist letzten Endes in der Theorie der kleinen Schwingungen der Mechanik enthalten (vgl. L 23).

2) Hierbei muß im Fall konzentrierter Impedanzen praktisch die Beschränkung auf Frequenzen vorausgesetzt werden, wo die quasistationäre Betrachtung derselben noch zulässig ist (Wellenlänge $\gg$ Linear-dimens. d. Imped.).

oder -pole von $\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2}$ sein können, also *keinesfalls Verzweigungsstellen von* $k(\omega)$. Schließlich kann der Grad 2ϱ von $\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2}$[1]) nur sein:

$$2\varrho = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ \text{oder } -2, \end{cases} \tag{28}$$

je nach dem kapazitiven oder induktiven Verhalten von $\mathfrak{Z}_{1,2}$ bei hohen Frequenzen.[2])

Auf den in der Hauptsache in (4)—(6), (15), (20), (21) und (24)—(28) zusammengefaßten Grundlagen beruhen die im folgenden ausgesprochenen allgemeinen Dispersionssätze, die das Fundament der Theorie der Signalfortpflanzung in dispergierenden Systemen bilden. Wir gehen hierzu aus von den für das einzelne System charakteristischen Punkten, den Verzweigungsstellen ω_g. Sie liegen nach dem Vorangehenden sämtlich konjugiert reell auf (bzw. ein wenig oberhalb) der reellen Achse. Allen betrachteten Dispersionssystemen ist nun nach (4)—(6) gemeinsam, daß ihre Verzweigungsstellen von 2. Ordnung sind.[3]) Das hat folgende Konsequenz: Wir denken uns eine reelle, von ω_g verschiedene Frequenz α, deren Fortpflanzungsmaß reell ist, für die also $R(\alpha) > 0$ im Falle (4), $|R(\alpha)| < 1$ bzw. $|P(\alpha)| < 1$ im Falle (5) bzw. (6) gilt; das bedeutet nach (1)—(3) eine harmonische ungedämpfte Fortpflanzung; da mit k auch $\mathfrak{Z}$ reell ist, liegen dann P und I in Phase, mit der Welle wird also gleichbleibende Energie in der positiven x-Richtung transportiert. Denkt man sich α längs der reellen Achse verschoben, so ändert sich hieran so lange nichts, bis α an eine Stelle ω_g kommt. Bei der Weiterbewegung geht α unmittelbar unterhalb ω_g vorbei, da entsprechend dem Grenzübergang vom verlustarmen Fall her ω_g kurz über der reellen Achse zu denken ist. Nach Passieren von ω_g ist aber $k(\alpha)$, weil ω_g eine Verzweigungsstelle 2. Ordnung ist, rein imaginär[3]), die Fortpflanzung erfolgt also mit x

1) Hierunter wird die Differenz der Grade von Zähler und Nenner verstanden.

2) Vgl. Anm. 2) der vorangehenden Seite!

3) D. h. in Umgebung einer solchen verhält sich $k(\omega)$ wie

$$(\omega - \omega_g)^{\pm \frac{1}{2}}.$$

exponentiell; zugleich wird $\mathfrak{Z}$ imaginär, P und I um $\pi/2$ phasenverschoben. Da das System nach Voraussetzung keine inneren Energiequellen enthält, folgt, daß ein exponentieller Anstieg unmöglich ist; $k(\alpha)$ muß daher im Gebiet zwischen der passierten und der nächsten Verzweigungsstelle ω_g negativ imaginär sein. Die ω_g haben also wie bei den bekannten Siebketten allgemein die Eigenschaft, die abwechselnd liegenden „Durchlässigkeits"- und „Sperrgebiete" (D- und S-Gebiete) zu trennen, und werden demgemäß Grenzfrequenzen genannt. — Wir denken uns die Verzweigungsschnitte der zweiblätterigen Riemannschen $k(\omega)$-Fläche geradlinig zwischen je zwei benachbarten ω_g durch die S-Gebiete gezogen[1]); dann soll also im oberen Blatt, wo die α zu denken sind, $k(\omega)$ auf der Unterseite eines Schnittes negativ imaginär sein.

§ 4. Die Fundamentalsätze über kontinuierliche Dispersionssysteme

Von hier an beschränken wir uns gemäß dem Programm am Ende von § 1 im Rahmen dieser Arbeit auf kontinuierliche Systeme. Für diese kann man auf Grund der bisher entwickelten Eigenschaften folgende Fundamentalsätze beweisen:

Satz I. Die Funktion $k'(\omega) \equiv \frac{dk}{d\omega}$[2]) ist in den D-Gebieten aller Kontinuen $\gtrless 0$; das Gleichheitszeichen gilt nur für $\omega = 0$ und $\omega = \infty$, falls diese Stellen keine Doppelwurzeln von $R(\omega)$ sind.

Satz II. $k'(\omega)$ hat nirgends ein endliches reelles Maximum oder Extremum höherer Ordnung und läuft in jedem D-Gebiet von $+\infty$ über ein positives Minimum — wo $k'' > 0$ — wieder nach $+\infty$, $k''(\omega)$ läuft entsprechend in einem D-Gebiet der rechten Halbebene positiv monoton von $-\infty$ nach $+\infty$ (also in der linken negativ monoton).

Satz III. Die beiden Arten von Grenzfrequenzen, an denen $R(\omega)$ 0 bzw. ∞ wird, und die mit ω_Z bzw. ω_N bezeichnet seien, liegen in einer Halbebene stets abwechselnd, und zwar

1) Das ist als reine Konvention anzusehen.

2) $k'(\omega)$ bedeutet physikalisch die reziproke Gruppengeschwindigkeit (vgl. unten).

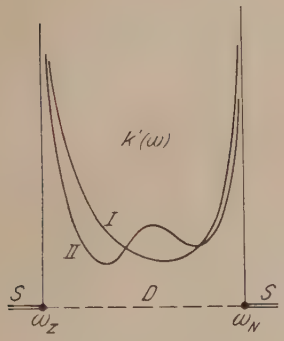
sind in der rechten die ω_Z untere, die ω_N obere Grenzfrequenzen — links umgekehrt.

Satz IV. $R(\omega)$ hat keine endlichen, von 0 verschiedenen Doppelwurzeln und -pole.

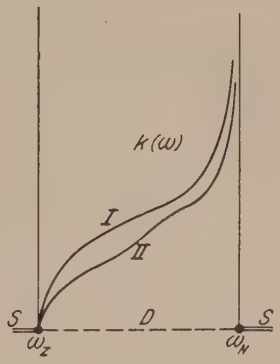
Zum Beweise dieser Sätze beachte man zunächst, daß entsprechend dem Verzweigungscharakter der Stellen ω_g die Forderung: „$k(\omega)$ = negativ imaginär nahe einer Grenzfrequenz am unteren Rand eines Schnittes im oberen Blatt" äquivalent ist mit der anderen: „$k'(\omega)$ = positiv reell im verzweigungsfreien (D)-Gebiet nahe einer Grenzfrequenz im oberen Blatt". Man verifiziert das leicht, indem man $k(\omega)$ in Umgebung einer Grenzfrequenz entwickelt und in Polarkoordinaten schreibt (vgl. Fußnote 3, S. 308). Nun ist in $k = \sqrt{R(\omega)}$ das Vorzeichen der Wurzel in allen D-Gebieten im oberen Blatt das gleiche und soll als positiv festgesetzt werden — was physikalisch bedeutet, daß die Phase einer harmonischen Welle in der Fortschreitungsrichtung zunimmt —; daraus zusammen folgt aber *Satz III.* — Eine Doppelwurzel oder ein Doppelpol von $R(\omega)$ kann als Zusammenrücken zweier gleichartiger Grenzfrequenzen gedeutet werden; da zwischen diesen aber eine der anderen Art liegt, so würden sich die zwei gleichen Linearfaktoren in $Z(\omega)$ und $N(\omega)$ (23) fortheben. Damit folgt *Satz IV.*

Satz I beweisen wir indirekt: Da $k'(\omega)$ an den Enden eines D-Gebietes > 0 und $\sqrt{R(\omega)}$ in D positiv ist, könnte wegen $k' = \frac{R'}{2\sqrt{R}}$ (4) k' in D nur durch einen Vorzeichenwechsel von R' negativ werden; ein solcher müßte aber wegen des gleichen Vorzeichens an den Enden von D mindestens zweimal erfolgen — oder im Grenzfall in Form eines horizontalen Wendepunktes von R —, und zwar wegen der Spiegelbildlichkeit von R in wenigstens zwei D-Gebieten. Das hätte die Existenz mindestens einer zur reellen Achse parallelen Geraden zur Folge, die in diesen beiden D-Gebieten allein die Kurve $R(\omega)$ sechsmal schneidet. Außerdem schneidet sie $R(\omega)$ — bei im übrigen monotonem Verlauf — in jedem anderen D-Gebiet einmal, wobei ein solches, das $\omega = 0$ oder $\omega = \infty$ enthält, doppelt zu zählen ist. Das wären, wenn $2r$ den höheren der beiden Grade von $Z(\omega)$ und $N(\omega)$ bezeichnet

[vgl. (23) und (28)], im ganzen $(2r + 4)$ Schnittpunkte. Das ist aber ein Widerspruch, da die Gleichung $\frac{Z(\omega)}{N(\omega)} = \text{const}$ nur $2r$



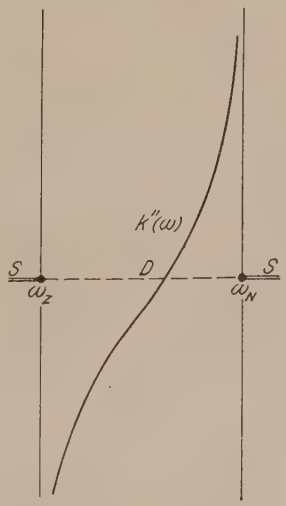
Verlauf von $k'(\omega)$
Fig. 6



Verlauf von $k(\omega)$
Fig. 7

Wurzeln hat. Damit ist *Satz I* bewiesen.

Satz II folgt ebenfalls indirekt: Hätte $k'(\omega)$ innerhalb eines D-Gebietes nicht den geforderten allgemeinen Verlauf (Kurve I in Fig. 6), sondern drei Extrema (Kurve II) — die event. auch in ein Extremum höherer Ordnung zusammenfallen können, d. h. zugleich $k'' = 0$ und $k''' = 0$ —, so müßte $k(\omega)$ entsprechend drei Wendepunkte haben (Fig. 7) — bzw. einen Wendepunkt 3. Ordnung —; es müßte also Gerade geben, die $k(\omega)$ in D fünfmal schneiden. Dieselben müßten die Kurve $k(\omega)$ außerdem so oft schneiden, als Unendlichkeitsstellen ω_N vorhanden sind, abgesehen von der, die das gerade betrachtete D-Gebiet abschließt, also im ganzen $(2r + 4)$ mal, wenn $2r$



Verlauf von $k''(\omega)$
Fig. 8

den Grad von $N(\omega)$ bedeutet. Nun ist die Gleichung dieser Schnittpunkte von der Form:

$$k(\omega) = c_1\,\omega + c_2 \quad \text{bzw.} \quad Z(\omega) = N(\omega)(c_1\,\omega + c_2)^2,$$

also vom $(2r+2)$ten Grad in ω. Daher kann es nur $(2r+2)$ Schnittpunkte geben; also ist nur ein Verlauf wie I (Figg. 6, 7), von k und k', bzw. von k'', wie in Fig. 8 gezeigt, möglich: *Satz II.*

§ 5. Funktionentheoretischer Ansatz. Signale mit rationalem Spektrum

Der allgemeine Ausdruck für die Signalfortpflanzung ist als Zusammenfassung vieler monochromatischer Wellen ein im oberen Blatt der $k(\omega)$-Ebene geführtes Integral von der Form:

$$P(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\infty)} F(\omega)\, e^{i(\omega t - kx)}\, d\omega \tag{29a}$$

bzw.

$$P(x,T) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\infty)} F(\omega)\, e^{ix(\omega T - k)}\, d\omega\,, \quad T = \frac{t}{x}\,; \tag{29b}$$

unter $\int\limits_{(\infty)} \cdots d\omega$ sei ein im Einzelfall näher zu beschreibender Integrationsweg verstanden, der in zwei Richtungen nach ∞ läuft, speziell in (29) von $-\infty$ nach $+\infty$ in Richtung der reellen Achse unterhalb aller singulären Stellen des Integranden. Man kommt hierzu, indem man das gegebene Signal: $P(0,t)$ als komplexes Fourierintegral schreibt. Unter „Signal" wird zunächst allgemein ein Vorgang $P(t)$ verstanden, der für genügend kleine t identisch verschwindet, also zu einer endlichen Zeit, die als $t=0$ gewählt wird, einsetzt. Bei großem t braucht er indessen nicht zu verklingen, sondern kann z. B. in einen stationären Schwingungszustand $e^{i\alpha t}$ übergehen; das komplexe Fourierintegral behält im Gegensatz zum reellen bekanntlich auch dann seinen Sinn. Das fortgepflanzte Signal $P(x,t)$ wird in diesen Fällen nach einem noch von dem System und der Tiefe x abhängenden Zeitintervall des „Einschwingens" schließlich ebenfalls stationär von der Frequeuz α:

$$P_\alpha(x,t) = \text{const}\cdot e^{i[\alpha t - k(\alpha)x]}, \tag{30}$$

in diesem Sinne soll vom „flüchtigen" und „stationären" Signal in der Tiefe x gesprochen werden.

In dem Exponentialfaktor von (29) kommen mittels $k(\omega)$ die Eigenschaften des Systems zum Ausdruck, während die sogenannte „Beifunktion“ $F(\omega)$ das komplexe Spektrum des aufgegebenen Signals $P(0,t)$ bedeutet; letzteres trifft allerdings nur für eine fortschreitende Welle bzw. in ∞ langen Systemen zu, bei begrenzten treten infolge der Randbedingungen, d. h. durch Reflexionen in $F(\omega)$ noch der Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}(\omega)$ auf und Funktionen, die von den Impedanzen der Ein- und Ausgangsschaltung herrühren. Da indessen diese rational sind und $\mathfrak{Z}(\omega)$ wie $k(\omega)$ verzweigt ist, ergeben sich hierdurch keine prinzipiellen mathematischen Erschwerungen; physikalisch ist das sofort einleuchtend, da die charakteristischen Verzerrungserscheinungen von der Dispersion des *Systems* herrühren und, vorausgesetzt daß dieses genügend lang ist, die ausschlaggebende Rolle spielen. Der Begriff der „Systemlänge“ wird später (§ 13) mathematisch präzisiert werden. — Die im folgenden entwickelte Theorie hat entsprechend der Fragestellung lange Systeme zum Gegenstand, ist also im wesentlichen eine asymptotische Theorie; das kommt schon darin zum Ausdruck, daß von den bei solchen Fragen allgemein anwendbaren Methoden: Entwicklung in erzwungene und Eigenschwingungen [Residuensatz; Heavisidesche Formel (L 3, S. 29)] oder in fort- und rückschreitende Wellen die zweite als die geeignete gewählt wurde. Aus dem genannten Grunde wird dann wie bei ∞ langen Systemen gerechnet, d. h. unter $F(\omega)$ das Signalspektrum allein verstanden werden.

Unter Ausschluß von verzweigten Funktionen und nichtexponentiellen Transzendenten[1]) sei dann $F(\omega)$ auf rationale Funktionen beschränkt. Durch Partialbruchzerlegung erhält man dann Integrale der Form:

$$P(x,t) = \sum_{\varkappa} C_{\varkappa} \int_{(\infty)} \frac{e^{i(\omega t - k x)}}{(\omega - \alpha_{\varkappa})^{\nu_{\varkappa}}} d\omega , \tag{31}$$

deren Integrationsweg längs der reellen Achse unterhalb von

1) Im Falle exponentieller Abhängigkeit kann $F(\omega)$ mit dem Exponentialglied zusammengefaßt werden.

α und der Stellen ω_g verläuft. Im einfachsten Fall reduziert sich $F(\omega)$ auf eine Konstante:

$$P(x,t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(\infty)} e^{i(\omega t - kx)}\, d\omega . \tag{32a}$$

Hierin kommen, da das Signalspektrum alle Frequenzen gleichmäßig enthält, die Eigenschaften des Mediums rein zum Ausdruck. Das aufgegebene Signal:

$$P(0,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{(\infty)} e^{i\omega t}\, d\omega \tag{32b}$$

wird hierbei durch eine „Zackenfunktion“ $z(t)$:

$$z(t) = \begin{cases} 0; & t \neq 0 \\ \infty; & t = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} z(t)\, dt = 1; \quad \text{z. B.: } z(t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{e^{-\frac{t^2}{\delta}}}{\sqrt{\pi \delta}} \tag{32c}$$

dargestellt und sei als „Zackensignal“ oder allg. „Signal ohne Hauptfrequenz“ bezeichnet. — Im Falle $\nu = 1$ ist $F(\omega) = \frac{\text{const}}{\omega - \alpha}$ ein Resonanzterm mit der „Hauptfrequenz“ α. Das zugehörige Signal:

$$P(0,t) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \alpha}\, d\omega , \tag{33a}$$

das mathematisch einen Dirichletschen Diskontinuitätsfaktor darstellt, hat den Verlauf:

$$P(0,t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ e^{i\alpha t}; & t > 0 \end{cases} \tag{33b}$$

und soll „Einsatzsignal“ bzw. allgemein „Signal mit Hauptfrequenz“ genannt werden. Den Fall $\nu > 1$ kann man durch partielle Integration auf $(\nu - 1)$ und damit auf $\nu = 1$ zurückführen; z. B.:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{(\infty)} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - \alpha)^2}\, d\omega = \frac{t}{2\pi i} \int_{(\infty)} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \alpha}\, d\omega = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ t e^{i\alpha t}; & t > 0 \end{cases} . \tag{34}$$

Aus Einsatzsignalen lassen sich Signale, die durch Schwingungsvorgänge in konzentrierten linearen Systemen erzeugt werden, linear zusammensetzen.[1]) Speziell erhält man für das

1) Vgl. die Heavisidesche Formel („Expansion, Theorem“), z. B. L 3, S. 29, L 18, S. 298.

cos- und sin-Signal [Real- bzw. Imaginärteil von (33b)] der reellen Frequenz α:

$$(35a)\qquad \left\{\begin{aligned} P_{\cos}(x,t) &= \frac{1}{2}[P(\alpha)+P(-\alpha)] \\ &= \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{(\infty)} \frac{\omega}{\omega^2-\alpha^2}\, e^{i(\omega t - k x)}\, d\omega\,; \end{aligned}\right.$$

$$(35b)\qquad \left\{\begin{aligned} P_{\sin}(x,t) &= \frac{1}{2i}[P(\alpha)-P(-\alpha)] \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\infty)} \frac{\alpha}{\omega^2-\alpha^2}\, e^{i(\omega t - k x)}\, d\omega \end{aligned}\right.$$

und die „Stirnwelle“ $\alpha = 0$:

$$(35c)\qquad P_0(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\infty)} \frac{e^{i(\omega t - k x)}}{\omega}\, d\omega\,,$$

die „Übergangsfunktion“ des Systems (vgl. L 2, S. 312). Unter α sei im folgenden eine endliche reelle Frequenz verstanden, da hierin alles Charakteristische enthalten ist; der übrigens nicht schwieriger zu behandelnde Fall komplexer α wird in einer anschließenden Arbeit gestreift werden.

II. Mathemathische Hauptdurchführung; Entwicklung der allgemeinen Theorie für verlustreiche Kontinua

§ 6. Der Grad von $k(\omega)$ als Latenzzeitkriterium. Der „Vorlauf“

In diesem Teil wird die Theorie der Signalfortpflanzung in verlustfreien Kontinuen durchgeführt; nur in § 6 ist die Verlustfreiheit noch nicht vorausgesetzt. — Eine für den Ausbreitungsvorgang in einem System in gewisser Hinsicht charakteristische Größe ist sein Grad ϱ [vgl. (28)]; wir zeigen: Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Latenzzeit in einem Kontinuum ist

$$(36)\qquad \varrho = 1\,.$$

Hierzu ziehen wir den bei (29) beschriebenen Integrationsweg in eine große Entfernung von $\omega = 0$ in der unteren Halbebene; das ist erlaubt, da nach Definition [bei (29)] der

Integrand unterhalb des ursprünglichen Weges regulär ist. Auf dem neuen Weg sei überall:

$$|\omega| > \begin{cases} \alpha \\ |\omega_\varrho|_{\max} \end{cases};$$

das kann stets erfüllt werden, da nach § 3 $\omega = \infty$ kein Verzweigungspunkt ist. Dann gelten dort absolut und gleichmäßig konvergente Potenzentwicklungen nach $1/\omega$:

$$(37) \qquad F(\omega) = \frac{a_0}{\omega^\nu}\left\{1 + \frac{a_1}{\omega} + \frac{a_2}{\omega^2}\cdots\right\},\ \nu = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$(38) \qquad k(\omega) = b_0^*\,\omega^\varrho\left\{1 + \frac{b_1^*}{\omega} + \frac{b_2^*}{\omega^2}\right\}.$$

Man erhält also aus (29), (31), durch Potenzentwicklung von $e^{\frac{\text{const}}{\omega^p}}$, $p = 1, 2, \ldots$;

$$(39) \qquad P(x,t) = \text{const}\int_{(\infty)} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\omega}\right) e^{it\omega}\,\frac{d\omega}{\omega^\nu},$$

worin $\mathfrak{P}$ eine gleichmäßig konvergierende Potenzreihe in $1/\omega$ mit konstantem Anfangsglied bedeutet und

(40) $\mathfrak{t} = t$ für $\varrho = 0$ und $\varrho = -1$; $\mathfrak{t} = t - b_0^* x$ für $\varrho = 1$ ist. P verschwindet für alle $\mathfrak{t} < 0$ identisch, da

$$P \leqq \lim_{r\to\infty} \int_\pi^{2\pi} r\,e^{-\mathfrak{t} r e^{i\varphi}} \cdot e^{i\varphi}\,d\varphi = 0.$$

Für $\mathfrak{t} > 0$ verschwindet das entsprechende Integral in der oberen Halbebene, man kann dann mit demselben den ursprünglichen offenen Weg zu einem Vollumlauf um $\omega = \infty$ ergänzen. Für diesen kann aber (39) wegen der Residuen der einzelnen Glieder sicher nicht identisch verschwinden. Damit ist die Behauptung (36) bewiesen. Für $\varrho = 1$ schreiben wir nach § 3 und Gl. (38):

$$(41) \qquad \begin{cases} k(\omega) = \dfrac{\omega}{v_k}\left(1 - i\dfrac{b_1}{\omega} - \dfrac{b_2}{\omega^2}\cdots\right),\ \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}\Big\}\ \text{reell},\ > 0; \\ \mathfrak{t} = t - \dfrac{x}{v_k} = t - t_0 \end{cases}$$

mit der Kopfgeschwindigkeit (Fortpflanzungsgeschwindigkeit)

$$(42) \qquad v_k = \lim_{\omega\to\infty} \frac{k}{\omega}$$

und der Latenzzeit t_0. Das Glied: $-i\frac{b_1}{\omega}$ kann zufolge (26) nur eine Verlustdämpfung bedeuten.

Erwähnt sei, daß bekanntlich alle — im Sinne der klassischen Physik — physikalisch streng behandelten Kontinua eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben[1]); die Latenzzeit entfällt nur bei quasistationären Näherungen, von denen z. B. beim Thomsonkabel[2]) oder dem eingangs erwähnten und in einer folgenden Arbeit durchgeführten Beispiel der Wanderwellenschutzspule Gebrauch gemacht wird.

Im folgenden wird die Theorie der Signalfortpflanzung zunächst für Kontinuen mit Latenzzeit (36) durchgeführt. Für diese liegt zufolge der Sätze von § 4 der allgemeine Verlauf von $R(\omega)$ fest: Da in jeder Halbebene eine untere Grenzfrequenz ω_z mehr vorhanden ist als obere ω_N, muß sowohl die absolut größte wie kleinste eine ω_z-Stelle sein, also $\omega = \infty$ in einem D-Gebiet (D_∞) liegen — was wir schon aus (38) und (41) wissen — und $\omega = 0$ in einem S-Gebiet, das aber auch auf 0 zusammenschrumpfen kann, so daß $\omega = 0$ Doppelwurzel von $R(\omega)$ wird (§ 3). Die Grenzfrequenzen ω_z und ω_N sowie die D- und S-Gebiete denken wir uns von $\omega = \infty$ aus fortlaufend numeriert.

Wir führen nun unser Grundintegral (29) in der Weise aus, daß wir wie eben den Integrationsweg in eine große Entfernung ausziehen. (39) ergibt dann für $t = 0$:

$$(43) \qquad P(x,t_0) = \frac{a_0 e^{-b_1 t_0}}{2\pi i} \int_{(\infty)} \frac{d\omega}{\omega^\nu} = \begin{cases} \infty\,; & \nu = 0 \\ \frac{a_0}{2} e^{-b_1 t_0}\,; & \nu = 1\,; \\ 0\,; & \nu > 1 \end{cases}$$

für $t > 0$ beim Vollumlauf:

$$P(x,t) = \frac{a_0 e^{-b_1 t_0}}{2\pi i} \oint_{(\infty)} \frac{e^{it\omega}}{\omega^\nu} \sum_0^\infty c_\varkappa \omega^{-\varkappa} d\omega\,;$$

$$c_\varkappa = c_\varkappa(x),\ c_0 = 1,\ c_1 = a_1 + i b_2 t_0, \ldots .$$

---

1) Vgl. z. B. den Fall der Optik (18); L 25, 26!

2) Vgl. hierzu z. B. L 21.

Da $\frac{e^{i t \omega}}{\omega^{\mu}}$ das Residuum $\frac{(i t)^{\mu-1}}{(\mu-1)!}$ liefert, bekommt man für $t > 0$ eine Potenzentwicklung nach t:

$$(44)\quad \begin{cases} P(x,t) = \frac{(i t)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\, a_0\, e^{-b_1 t_0} \\ \qquad\qquad \cdot \left\{ 1 + i \frac{c_1(x)}{\nu} t - \frac{c_2(x)}{\nu(\nu+1)} t^2 \ldots \right\}; \\ \nu > 0 \ (\nu = 0: \text{ vgl. unten!}), \end{cases}$$

die gemäß ihrer Herleitung gleichmäßig in x und t konvergiert. Man kann sie auch in anderer Form schreiben, indem man in der Entwicklung (41) von $k(\omega)$ noch das Glied mit $1/\omega$ im Exponenten beibehält:

$$P(x,t) = \frac{a_0 e^{-b_1 t_0}}{2\pi i} \oint_{(\infty)} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\omega}\right) e^{i\left(t\omega + \frac{b_2 t_0}{\omega}\right)} \frac{d\omega}{\omega^{\nu}},$$

worin wieder

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{\omega}\right) = \sum_0^{\infty} \frac{g_{\varkappa}}{\omega^{\varkappa}}$$

für $|\omega| > \begin{cases} \alpha \\ |\omega_g|_{\max} \end{cases}$ absolut und gleichmäßig konvergent ist; oder mit

$$(45)\qquad b_2 t_0 = b_2 \frac{x}{v_k} \equiv \xi,$$

Vertauschung von Summation und Integration und der Substition $\omega = \sqrt{\frac{\xi}{t}} e^{i\varphi}$:

$$P(\xi,t) = \frac{a_0 e^{-b_1 t_0}}{2\pi} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \left\{ g_{\varkappa} \left(\frac{t}{\xi}\right)^{\frac{\nu+\varkappa-1}{2}} \cdot \int_{(2\pi)} e^{-i(\nu+\varkappa-1)\varphi} e^{2i\sqrt{\xi t}\cos\varphi}\, d\varphi \right\};$$

hierbei bedeutet $\int_{(2\pi)}$ die Integration längs eines Stückes zwischen zwei Parallelen zur imaginären φ-Achse mit dem Abstand 2π,

auf das sich der Umlauf in der ω-Ebene abbildet. Man erhält also:

$$(46)\quad P(\xi, t) = a_0 e^{-b_1 t_0} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \left\{ g_\varkappa \left(-i \sqrt{\frac{t}{\xi}} \right)^{\nu+\varkappa-1} \cdot J_{\nu+\varkappa-1}(2\sqrt{\xi t}) \right\}$$

[J_μ = Besselsche Funktion μ-ter Ordnung; vgl. Janke-Emde, S. 169!]; speziell für das sin-Signal (35) wird

$$(47)\quad P_{\sin}(\xi, t) = a_0 e^{-b_1 t_0} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{t}{\xi}} J_1(2\sqrt{\xi t}) + \ldots,$$

was — bis auf den Dämpfungsfaktor:

$$(48)\quad e^{-b_1 t_0} \quad —$$

mit dem von Sommerfeld gefundenen Ausdruck für die „Vorläufer" übereinstimmt.[1])

Aus den Ergebnissen (43) ÷ (47) folgt nun zunächst, daß der Signalkopf bis auf den Dämpfungsfaktor (48) stets getreu übertragen wird. Wir zeigen dies für das Zackensignal (32). Hier wird mit

$$\nu = 0;\ a_0 = i;\ a_1 = a_2 = \ldots = 0:$$

$$(49)\quad P(x, t) = \begin{cases} \infty & ;\ t < 0, \\ 0 & ;\ t = 0, \\ i\, e^{-b_1 t_0} \left\{ c_{10}(x) + i \frac{c_{20}(x)}{1!} t \ldots \right\} & ;\ t > 0, \end{cases}$$

wobei $c_{\varkappa 0} = c_\varkappa(x;\ a_j = 0)$. Bei x kommt also ebenfalls ein Zackensignal an, dessen Fläche, wie aus:

$$\int_{-\infty}^{t} P\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\infty)} \frac{e^{i(\omega t - kx)}}{\omega} d\omega =$$

$$e^{-b_1 t_0} \cdot \left\{ 1 + i \frac{c_{10}(x)}{1!} t - \frac{c_{20}(x)}{2!} t^2 \ldots \right\};\ t > 0$$

ersichtlich ist, bis auf (48) die gleiche ist wie bei $x = 0$ [s. (32)]. Ebenso sieht man, daß der Sprung beim Beginn des Einsatzsignals (33), der der zeitlichen Ableitung beim sin-Signal (35) usw., mit dem Faktor (48) versehen, erhalten bleibt. Man zeigt das allgemein durch Zugrundelegung eines Signals der umfassenderen Form:

---

1) Vgl. L 26, Formel (33)!

$$(50) \qquad P(0,t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t < 0 \\ \sum_{\varkappa=1}^{n} p_\varkappa e^{i\alpha_\varkappa t}; & t > 0; \end{cases}$$

der Fall, daß auch Glieder der Form $t^\lambda e^{i\alpha_\varkappa t}$ in (50) enthalten sind, erfordert nach (34) keine besondere Behandlung. Man erhält mit

$$\frac{1}{\omega - \alpha_\varkappa} = \frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_\varkappa}{\omega}\right)^j$$

und

$$e^{i(\omega t - kx)} = e^{-b_1 t_0} e^{i\omega t} \left\{1 + \frac{e_1}{\omega} + \frac{e_2}{\omega^2} \ldots\right\}:$$

$$(51) \qquad \begin{cases} P(x,t) = e^{-b_1 t_0} \left\{ \sum_\varkappa p_\varkappa + i t \cdot \sum_\varkappa p_\varkappa (e_1 + \alpha_\varkappa) \right. \\ \qquad \left. - \frac{t^2}{2!} \sum_\varkappa p_\varkappa (e_2 + e_1 \alpha_\varkappa + \alpha_\varkappa^2) \ldots \right\}; \quad t > 0. \end{cases}$$

Nun ist in (51):

$$s_0 = \sum_\varkappa p_\varkappa \text{ der Sprung von } P \text{ bei } t = 0;$$

$$s_1 = i \sum_\varkappa p_\varkappa \cdot \alpha_\varkappa \text{ der von } \frac{dP}{dt} \ldots \text{ usw.,}$$

also:

$$(52) \quad P(x,t) = e^{-b_1 t_0} \left\{ s_0 + (s_1 + i e_1 s_0) t + \frac{s_2 + i e_1 s_1 - e_2 s_0}{2!} t^2 \ldots \right\}.$$

(52) setzt die verzerrungsfreie Fortpflanzung des Signalkopfes in Evidenz. Diese erklärt sich physikalisch daraus, daß sich wegen der Dispersionsfreiheit von $k(\omega)$ bei $\omega \to \infty$ [nach (41), (42)] die sehr hohen Frequenzen mit Kopfgeschwindigkeit fortpflanzen; und diese allein sind maßgeblich für die Form des Signalkopfes: die ihn charakterisierende Unstetigkeit bei $t = 0$ hängt, wie man einerseits aus (32) bis (35), andererseits aus (43) bis (52) erkennt, allein von der Zahl ν ab, der Ordnung der Frequenz ∞ im Signalspektrum. Mathematisch trägt man hier dem Einfluß der sehr hohen Frequenzen durch die Führung des Integrationsweges in großer Entfernung Rechnung.

Ohne Verzerrung wird aber nur der Signalkopf selbst, d. h. der Einsatz bei $t = 0$ übertragen; die nachfolgenden Teile weichen immer mehr vom Signalverlauf bei $x = 0$ ab, wie

z. B. (52) zeigt. Für diesen sich unmittelbar an $t = 0$ anschließenden, mit verschwindender Verzerrung beginnenden Zeitabschnitt, der als „Vorlauf" bezeichnet sei, läßt das als Potenzentwicklung erscheinende Integrationsergebnis — das übrigens einer Verallgemeinerung der Potenzentwicklung der Heaviside-Carsonschen Operatorengleichung[1]) entspricht — in den Formen (44) und (46), (47) alles Charakteristische erkennen: Die in x und t gleichmäßige Konvergenz wird praktisch mit wachsendem x und t immer schlechter, worin die zunehmende Abweichung vom ursprünglichen Signalverlauf, dessen Kopf ja das erste Glied der Vorlaufsentwicklung ist, zum Ausdruck kommt. Der wachsende Einfluß der späteren Glieder bedeutet physikalisch den immer kleinerer Frequenzen des Signalspektrums, bei denen sich die Dispersion immer stärker bemerkbar macht; die Tatsache, daß die Entwicklung wegen schlechter Konvergenz bald unbrauchbar wird, bedeutet den vollkommenen Verlust der Ähnlichkeit mit dem ursprünglichen Signal und damit das Ende des Vorlaufs. Dieses tritt, was die Signalart betrifft, nach (44) um so eher ein, je kleiner ν ist; den Haupteinfluß hat indessen mittels der Koeffizienten $c_\varkappa$ (44) das Medium: diese wachsen mit der Eindringtiefe x und der Veränderlichkeit von $\frac{k(\omega)}{\omega}$, d. h. der Stärke der Dispersion bei hohen Frequenzen. Das zeigt noch deutlicher die Form (46), (47), wenn man die Definition (45) der dort eingehenden Größe ξ beachtet. Zugleich erkennt man aus (46), (47) den allgemeinen Charakter des nunmehr von der Form des speziellen Signals immer weniger beeinflußten Vorlaufs: nach dem bekannten Verhalten der mit Potenzfaktoren versehenen Besselschen Funktionen sind es Oszillationen wachsender Periode und Amplitude, die bei größerer Eindringtiefe anfangs sehr klein gegen die entsprechenden Größen der stationären Signalfrequenz sind und — abgesehen von dem bezeichnenderweise zu α proportionalen Amplitudenfaktor — nur vom System und der Tiefe x abhängen. Im einzelnen sei hierzu auf Sommerfeld L 26, S. 202, speziell Fig. 9 verwiesen, wo der Vorlauf des sin-Signals (47) genauer beschrieben ist. Als Ende

1) Vgl. L 3, S. 21.

des Vorlaufs ist hier etwa die Zeit anzusehen, von der ab die asymptotische Darstellung der eingehenden Besselschen Funktionen zweckmäßig ist, was mit der später gegebenen allgemeineren Definition der Aufzeit (s. u. § 13) in Einklang steht.

§ 7. Prinzipielles über die zu verwendende Integrationsmethode

Für das Folgende ist die Voraussetzung wesentlich, daß die Eindringtiefe x groß ist, so daß asymptotische Rechnungen angemessen sind (vgl. § 5); quantitativ wird diese Bedingung in § 13 formuliert. Nach den Ergebnissen des vorangehenden Paragraphen bedeutet das einen kurzen Vorlauf; der folgende Teil des Signalverlaufs, der „Ablauf", ist dann die weit überwiegende Hauptepoche. Ferner wird im folgenden Verlustfreiheit vorausgesetzt.

Zunächst erhebt sich die prinzipielle Frage nach der hier angemessenen Berechnungsmethode für das Grundintegral (29). Bei Integralen solcher Art kann man zunächst an verschiedene Behandlungsweisen denken: I. Entwicklung des Integranden in eine in genügender Entfernung absolut konvergente Reihe nach fallenden Potenzen und gliedweise Integration; diese wurde in § 6 beim Vorlauf benutzt und ist, wie dort gezeigt, hier nicht zu empfehlen. II. Zusammenziehung des Integrationsweges und Zerlegung des Integrals in einzelne Residuenintegrale und solche, die um die Verzweigungsschnitte herumlaufen[1]); dies entspräche einer Verallgemeinerung der nur für eindeutige Funktionen ausreichenden Heavisideschen Entwickelungsformel (vgl. Fußnote S. 314); auch diese Methode, — die sich bei kurzen Distanzen x als geeignet erweisen wird —, ist hier unbrauchbar, wie folgende einfache Überlegung lehrt: Ein Residuenintegral um α ergibt einen stationären Zustand (30), also, da das Gesamtintegral den Einschwingvorgang darstellt, die Integrale um die Verzweigungsschnitte schließlich verklingende „Eigenschwingungen"; da, wie am deutlichsten (46) zeigt, im Ablauf anfangs sehr rasche Oszillationen kleiner

1) So geht z. B. in einem mathematisch ähnlichen Fall Sommerfeld in L 27, 28 vor; vgl. aber hierzu die Kritik und Methode von Weyl (L 41), die der hier gewählten entspricht!

Amplitude stattfinden, würde die genannte Zerlegung eine Berechnung als Differenz großer Größen mit rasch wechselnden Phasen bedeuten. — Die beiden eben betrachteten mathematischen Methoden sind offenbar dem hier darzustellenden physikalischen Vorgang nicht adäquat. Nicht so III., die Methode der (eventuell verallgemeinerten) Sattelpunktsintegration (vgl. L 8; L 7, S. 435; die Kenntnis der Sattelpunktsmethode wird im folgenden vorausgesetzt); denn diese stützt sich gerade auf die rasche Veränderlichkeit der Exponentenfunktion in (29), also große Eindringtiefe und Dispersion. Sie führt auf asymptotische semikonvergente Entwicklungen im Sinne Poincarés, wird also bereits durch (46), (47) nahegelegt. Ihr würde die asymptotische Entwicklung der Operatorengleichung entsprechen, doch dürfte es kaum möglich sein, in so allgemeinen Fällen wie hier mit Hilfe der Heaviside-Carsonschen Methoden wirklich zu ihr zu gelangen[1]); an diesem Punkt zeigt sich deutlich die methodische Überlegenheit der funktionentheoretischen Behandlung, die diese Entwicklung ganz von selbst liefert.

§ 8. Gruppengeschwindigkeit und „Signalfrequenzen"; Berechnung der Einzelterme

Die Aufgabe des Folgenden ist es, das Grundintegral § 2; (29) bei — im Rahmen der allgemeinen Sätze von § 4 — beliebigem $k(\omega)$ mittels Sattelpunktsintegration auszuwerten, also zu einem Ergebnis zu gelangen, das den Allgemeinheitsgrad der Vorlaufentwicklung besitzt. Hierzu gehen wir von der erst im folgenden Paragraphen bewiesenen Tatsache aus, daß sich der ursprüngliche Integrationsweg stets in einen „Sattelpunktsweg" deformieren läßt, der aus einer Anzahl über Sattelpunkte führender Fallinien der Exponentialfunktion von (29) besteht. Das Gesamtintegral setzt sich dann aus einzelnen Sattelpunktsintegralen: J_{Sa} zusammen, die kurz mit dem Symbol

$$\int_{(Sa)} \ldots d\omega \tag{53}$$

1) Vgl. L 3, Abschnitt V; speziell S. 76!

bezeichnet werden sollen. Wir werten nun ein solches J_{Sa} aus wobei vorläufig nur dessen ungefährer Wert interessieren soll. Die Lage der Sattelpunkte ω_s der Exponentenfunktion in (29) zur Zeit T, ist durch das Verschwinden ihrer ersten Ableitung bestimmt:

$$k'(\omega_s) \equiv k_s' = T, \tag{54}$$

was mit der Aussage identisch ist: $\frac{1}{T}$ ist die Gruppengeschwindigkeit von ω_s.[1]) Die Auswertung soll in der abgekürzten Form wie z. B. bei Brillouin (L 1) oder Sommerfeld (L 29, S. 458) vorgenommen werden: Man entwickelt in der Umgebung von ω_s:

$$\begin{cases} k = k_s + k_s'\eta + \frac{k_s''}{2!}\eta^2 + \frac{k_s''}{3!}\eta^3 + \ldots; \quad k_s^{(v)} \equiv k^{(v)}(\omega_s), \\ \eta = \omega - \omega_s, \end{cases} \tag{55}$$

ebenso

$$F(\omega) = F_s + F_s'\eta + F_s''\frac{\eta^2}{2!} + \ldots; \quad F_s^{(v)} \equiv F^{(v)}(\omega_s) \tag{56}$$

und erhält einen Integranden mit einer von niedrigster Ordnung quadratischen Exponentenfunktion:

$$J_{Sa} = \frac{F_s e^{i\varphi_s}}{2\pi i} \int_{Sa} \left\{1 + \frac{F_s'}{F_s}\eta + \frac{F_s''}{2!F_s}\eta^2 \ldots\right\} \tag{57}$$

$$\cdot\, e^{-ix\left\{\frac{k_s''}{2!}\eta^2 + \frac{k_s'''}{3!}\eta^3 \ldots\right\}} d\eta; \quad \varphi_s \equiv \omega_s t - k_s x = x(\omega_s T - k_s).$$

Sind nun der Faktor

$$e^{i\left[(\omega t - kx) - \varphi_s - \frac{k_s''}{2!}\eta^2\right]} = e^{-ix\left[\frac{k_s'''}{3!}\eta^3 \ldots\right]}$$

und die Beifunktion $F(\omega)$ in einer gewissen Umgebung von $\eta = 0$ „langsam veränderlich" gegenüber $e^{-i\frac{k_s'' x}{2!}\eta^2}$, d. h. — diese oberflächliche Betrachtung wird später präzisiert! — ist für $|\eta| \leqq \eta_0$ der Wert dieser Funktionen nicht sehr verschieden von dem bei $\eta = 0$, wobei η_0 etwa durch die Forderung:

$$e^{-\frac{|k_s''|x}{2!}\cdot\eta_0^2} \text{ genügend} << 1 \tag{58}$$

1) Vgl. hierzu Brillouin L 1!

gekennzeichnet ist, so bedeutet das, daß der Beitrag des Fallinienweges außerhalb $|\eta| = \eta_0$ zu vernachlässigen ist, und innerhalb die Fallinie durch ihre Tangente approximiert werden kann. Diese Voraussetzungen sind bei genügend großem x, wie später gezeigt wird, im allgemeinen erfüllt. Da die Gefällerichtung

$$\zeta_s = -\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_s}{2} \bmod \pi; \quad \gamma_s = \arg(k_s'') \tag{59}$$

ist, erhält man dann aus (57) durch Zusammenfassung von $e^{-i\frac{k_s'''x}{3!}\eta^3\cdots}$ mit $F(\eta)$ zu $G(\eta)$, wobei $G_s = F_s$ ist, mit $\eta = e^{i\zeta_s}\cdot s$; $\eta_0 = s_0$:

$$J_{Sa} \approx \frac{F_s e^{i(\varphi_s+\zeta_s)}}{2\pi i}\int_{-s_0}^{+s_0}\left\{1 + \frac{G_s'}{G_s}e^{i\zeta_s} + \frac{G_s''}{2!\,G_s}e^{2i\zeta_s}s^2\ldots\right\} \cdot e^{-\frac{|k_s''|x}{2!}s^2} ds\,. \tag{60}$$

Das ergibt wegen

$$\int_{-s}^{+s} s^{2n+1} e^{-\lambda s^2} ds = 0 \tag{61}$$

bei Ausdehnung der Grenzen nach $\pm\infty$, was mit einem prozentualen Fehler von der Ordnung

$$\frac{G(s_0)}{G_s}\cdot\frac{e^{-\frac{|k_s''|x}{2!}s_0^2}}{s_0\sqrt{\frac{|k_s''|x}{2!}}} \tag{62}$$

verbunden ist:

$$J_{Sa} \approx \frac{F_s e^{i(\varphi_s+\zeta_s)}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{1 + \frac{G_s''}{2!\,G_s}e^{2i\zeta_0}s^2 + \frac{G_s^{(IV)}}{G_s}e^{4i\zeta_0}s^4\ldots\right\} \cdot e^{-\frac{|k_s''|x}{2!}s^2} ds\,, \tag{63}$$

also mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^{2n} e^{-\lambda s^2} ds = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{(2\lambda)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}: \tag{64}$$

$$(65)\quad \left\{ J_{Sa} \approx \frac{F_s e^{i\left(\varphi_s+\zeta_s-\frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{2\pi\,|k_s''|\,x}} \left\{ 1 + \frac{1}{2}\,\frac{G_s''}{2!\,G_s}\,\frac{e^{2i\zeta_s}}{\frac{|k_s''|\,x}{2!}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\,\frac{G_s^{(IV)}}{4!\,G_s}\,\frac{e^{4i\zeta_s}}{\left(\frac{|k_s''|\,x}{2!}\right)^2} \cdots \right\} \right.$$

Das ist eine im Poincaréschen Sinne asymptotische semikonvergente alternierende Entwicklung für genügend große $|k_s''|\,x$, also den gerade interessierenden Fall größerer Tiefe und Dispersion. Nach bekannten Methoden[1]) kann man ihren Fehler in Abhängigkeit von $|k_s''|\,x$ abschätzen; wir kommen später hierauf zurück. Wenn nur das Charakteristische des Ergebnisses, nicht die erreichbare Genauigkeit interessiert, kann man sich auf das Hauptglied von (65) beschränken, da bekanntlich die ersten Glieder solcher Entwicklungen in dem Gebiet, wo sie überhaupt anwendbar sind, relativ stark abnehmen (vgl. Jahnke-Emde und [1])!). Man erhält so speziell für ein Einsatzsignal:

$$(66)\quad J_{Sa} \sim \frac{e^{i\left[\omega_s t - k_s x + \zeta_s - \frac{\pi}{2}\right]}}{(\omega_s - \alpha)\sqrt{2\pi\,|k_s''|\,x}}.$$

Ein Term (65) bzw. (66) stellt nun mit einer mit zunehmendem $|k_s''|\,x$ immer besseren Annäherung einen Schwingungszustand der (allgemein komplexen) Frequenz ω_s dar, und zwar einen in dem betrachteten Kontinuum zu ω_s gehörigen „Wellenzug“: $e^{i(\omega_s t - k_s x)}$, dessen Amplitude gerade die ist, mit der ω_s im ursprünglichen Signalspektrum enthalten ist, versehen mit dem Faktor:

$$(67)\quad \sqrt{\frac{2\pi}{|k_s''|\,x}}.$$

Physikalisch bedeutet dieser, da der prozentuale Fehlerbetrag von (66) mit $\frac{1}{\sqrt{|k_s''|\,x}}$ abnimmt, also die Ankunft der Partialwelle auf eine mit $\sqrt{|k_s''|\,x}$ wachsende Zeit verteilt wird, daß alle Partialfrequenzen ω_s mit reeller Gruppengeschwindigkeit

1) Vgl. z. B. L 24, S. 50; L 7, S. 431 ff.; L 8, Literaturhinweis S. 543.

im ganzen vollständig übertragen werden; wir bezeichnen sie daher als „Signalfrequenzen". Hiernach ist es sinnvoll,

$$t_s = k_s' \cdot x \tag{54a}$$

als „Signalzeit von ω_s" bzw. die Gruppengeschwindigkeit

$$\frac{1}{k_s'} = \frac{x}{t} = \frac{1}{T} \tag{54b}$$

als „Signalgeschwindigkeit von ω_s" zu bezeichnen.

Nun kommen in jedem Augenblick so viele Signalfrequenzen bei x an, als Gl. (54) Wurzeln hat. Fundamental für die Beschreibung des Signalablaufs wird also die Wanderung der Sattelpunkte ω_s im Laufe von T sein; diese soll daher jetzt untersucht werden.

§ 9. Allgemeine Diskussion der Sattelpunktsbahnen als Bild des Signalablaufs. Bedeutung des einzelnen D-Gebietes; die „Quasilatenzzeit"

Die Grundlage bilden hierbei die allgemeinen Dispersionssätze von § 4, insbesondere Satz II. — Gl. (54) kann man nach (4), (23) in der Form schreiben:

$$\frac{Z}{N}\left\{\frac{Z'}{Z} - \frac{N'}{N}\right\}^2 = 4\,T^2.$$

Danach gibt es, wenn mit $2r$ der Grad von $N(\omega)$ bezeichnet wird, zu jeder Zeit T

$$s = 2(4r + 1) \tag{68}$$

Sattelpunkte, die nach § 3 symmetrisch zur Imaginärachse und reell oder konjugiert imaginär liegen müssen. Wir verfolgen ihre Wanderung rückwärts, d. h. von $T = \infty$ aus. Bei großem T laufen nach (54) alle ω_s in die $2r$ Stellen ω_N und $(2r + 2)$ Stellen ω_z ein, und zwar in folgender Weise: In der Nähe einer Stelle ω_N der rechten Halbebene ist $k(\omega)$ nach Satz III von § 4 von der Form:

$$k = \frac{2k_N}{\sqrt{\omega_N - \omega}}, \tag{69a}$$

in der Nähe von ω_z:

$$k = 2k_z\sqrt{\omega - \omega_z}, \tag{69b}$$

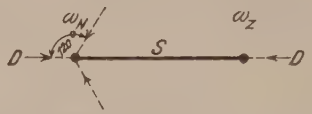
wobei k_N und k_z reell und positiv sind; also ergibt (54) als Lage der Sattelpunkte für sehr große T:

$$\omega_N - \omega_s = \left(\frac{k_N}{T}\right)^{2/3} \tag{70a}$$

bzw.

$$\omega_s - \omega_z = \left(\frac{k_z}{T}\right)^2. \tag{70b}$$

In eine Stelle ω_N laufen also für $T \to \infty$ drei Sattelpunkte ein, nach ω_z einer, in der in Fig. 9 dargestellten Anordnung;



Einlauf der Sattelpunkte in die Grenzfrequenzen
Fig. 9

das ergibt die richtige Summe (68). Die unter $\pm \frac{\pi}{3}$ nach ω_N laufenden Sattelpunkte, die als „Nebenpunkte" bezeichnet seien, sind hier ohne Interesse, da, wie sogleich gezeigt wird, der Integrationsweg allein über die auf der reellen Achse laufenden „Hauptpunkte" geführt wird.

Für deren Wanderung spielt nun eine Stelle ω_m:

$$k''(\omega_m) \equiv k''_m = 0; \quad k'''_m > 0 \tag{71}$$

als einzige Extremalstelle von k' in einem D-Gebiet (nach Satz II von § 4 bzw. Figg. 6—8) eine besondere Rolle. In ihrer Umgebung gilt:

$$k'(\omega_s) = T = T_m + \frac{k'''_m}{2!}(\omega_s - \omega_m)^2 \ldots \quad \text{mit} \quad T_m = k'(\omega_m),$$

also

$$\omega_s - \omega_m \approx \sqrt{\frac{2(T - T_m)}{k'''_m}}, \tag{72}$$

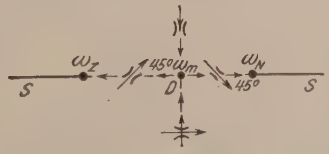
sowie

$$k_s'' \approx (\omega_s - \omega_m) \cdot k'''_m \approx \sqrt{2k'''_m (T - T_m)}. \tag{73}$$

Daraus folgt, daß sich die beiden zu einem D-Gebiet gehörigen Hauptsattelpunkte bei $T < T_m$ unterhalb und oberhalb der reellen Achse befinden, sich zur Zeit T_m bei ω_m zu

einem Tripelpunkt vereinigen und für $T > T_m$ längs der reellen Achse nach ω_z und ω_N hin auseinanderwandern; danach kommen zufolge § 8 *alle* Frequenzen eines D-Gebietes in jeder Tiefe x sukzessive an. Aus (73) folgt, daß die in (59) berechneten Gefällerichtungen ζ_s mod π folgende Werte haben:

$$(74)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{bei } T < T_m\text{: } \zeta_s = 0 \text{ für den unteren,} \\ \qquad\quad \zeta_s = \dfrac{\pi}{2} \text{ für den oberen Sattelpunkt,} \\ \text{bei } T > T_m\text{: } \zeta_s = +\dfrac{\pi}{4} \text{ für den linken,} \\ \qquad\quad \zeta_s = -\dfrac{\pi}{4} \text{ für den rechten Sattelpunkt.} \end{array}\right.$$



Wanderung der Hauptsattelpunkte eines D-Gebiets
Fig. 10

Ferner ist nach (72) der Betrag der zu ω_s gehörenden Welle $e^{i\varphi_s}$ [(57); (65)] bei $T > T_m$ gleich 1, bei $T < T_m$:

$$|e^{i\varphi_s}| = |e^{i(\varphi_s - \varphi_m)}| = |e^{ix[(\omega_s - \omega_m)T - (k_s - k_m)]}|$$

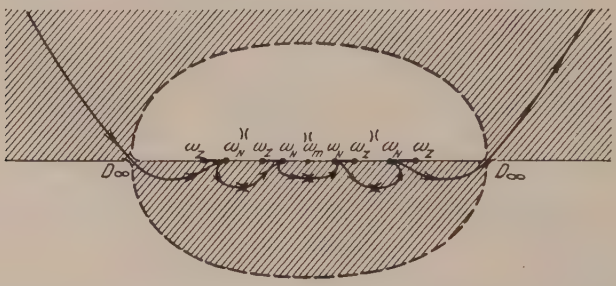
$$\approx |e^{ix(T - T_m)(\omega_s - \omega_m)}| \approx e^{\pm x\sqrt{\frac{2(T_m - T)^3}{k_m'''}}};$$

$$(75)\quad e^{i\varphi_s} \approx \left\{\begin{array}{ll} e^{-x\sqrt{\frac{2(T_m - T)^3}{k_m'''}}} & \text{für den unteren Sattelpunkt,} \\ e^{+x\sqrt{\frac{2(T_m - T)^3}{k_m'''}}} & \text{für den oberen Sattelpunkt.} \end{array}\right.$$

In Fig. 10 sind der Weg der Hauptsattelpunkte eines D-Gebietes sowie ihre Gefällerichtungen bzw. der Integrationsweg angedeutet.

Wir können nunmehr die dem § 8 zugrunde liegende Tatsache beweisen, daß es stets möglich ist, den ursprünglichen Integrationsweg von (29) in einen Sattelpunktsweg zu deformieren, und dessen allgemeinen Verlauf angeben: Die Gefällekurven über die Sattelpunkte münden ja beiderseits

in die wesentlich singulären Stellen des Integranden in solcher Richtung ein, daß der Realteil der Exponentenfunktion negativ ∞ wird; Endpunkte von Fallinien sind also die Stellen ω_N und $\omega = \infty$, und zwar bei jenen nach § 3 im oberen Blatt der Winkelraum unterhalb, im unteren Blatt oberhalb der reellen Achse, bei dieser nach § 6 für Zeiten $T > \frac{1}{v_k}$ im oberen Blatt der Winkelraum der oberen Halbebene. Anderseits ist über die Gebiete, wo die Exponentenfunktion negativen Realteil hat, folgendes bekannt: Bei $T < \frac{1}{v_k}$ hat die ganze untere Halb-



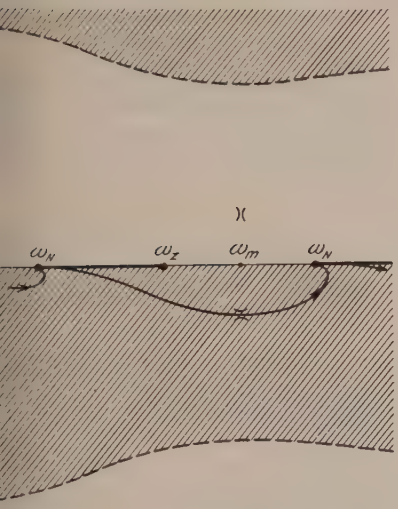
Relief der ω-Ebene für $\frac{1}{v_k} < T < T_{m\min}$

Fig. 11

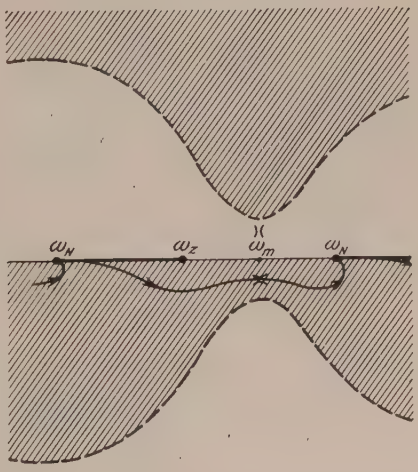
ebene diese Eigenschaft, bei $T > \frac{1}{v_k}$ nicht mehr deren entfernte Teile, dafür die der oberen Halbebene; die Begrenzungslinien dieser Gebiete rücken dann mit zunehmendem T von oben und unten gegen die reelle Achse und von rechts und links außerhalb $|\omega_z|_{\max}$ nach innen vor. Sie schneiden die reelle Achse zunächst nur in den beiden nach (42) u. (54) zu jeder Zeit $T > \frac{1}{v_k}$ vorhandenen Sattelpunkten des D_∞-Gebietes, dann zur kleinsten Zeit T_m von allen D-Gebieten zum erstenmal in den betreffenden Punkten $\pm \omega_m$ und später in den 4 Sattelpunkten dieser beiden spiegelbildlichen D-Gebiete; so sukzessive in allen D-Paaren!

Auf Grund dieser Kenntnisse ist man in der Lage, den Verlauf dieser Grenzlinien und der Gefällekurven in Abhängig-

keit von der hierfür allein maßgeblichen Größe T (vgl. L 1, S. 31) qualitativ anzugeben. Das ist in Fig. 11 beispielsweise für die gesamte ω-Ebene, in Figg. 12—16 für ein D-Gebiet in dessen Hauptphasen zu sehen; in den schraffierten Gebieten ist der Realteil des Exponenten negativ. Das Verhalten bei ω_m, das Fig. 14 zeigt, wird später bestätigt. Die Figuren sind nur qualitativ zu werten, vermitteln jedoch wegen der Lage der Grenzfrequenzen und der Sattelpunkte als Funktion von T sowie deren Eigenschaft, Kreuzungspunkte von ausgezeich-



Ausschnitt der ω-Ebene für $T \ll T_m$
Fig. 12

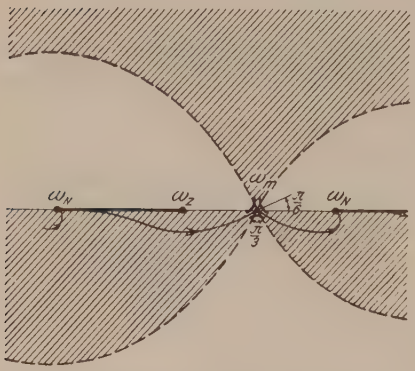


Ausschnitt der ω-Ebene für $T < T_m$
Fig. 13

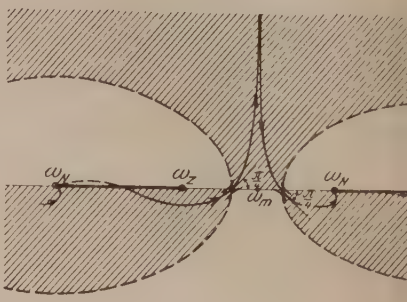
neten Fallinienpaaren zu sein, die als Grenzen gewisser Gebiete für alle anderen Fallinien unüberschreitbar sind, die entscheitende Kenntnis, daß der gezeichnete Sattelpunktsweg die an ihn zu knüpfenden Bedingungen erfüllt: Er ist zu allen Zeiten zusammenhängend, läuft nur durch schraffierte Gebiete und ist aus dem ursprünglichen Integrationsweg durch stetige Deformationen herstellbar — evtl. unter Berücksichtigung eines Residuums bei $\omega = \alpha$; von diesem soll erst später die Rede sein.

Diese Ergebnisse geben im Verein mit denen des vorangehenden Paragraphen Aufschluß über den Signalablauf in genügend großer Tiefe x: Zunächst tragen als Fortsetzung des

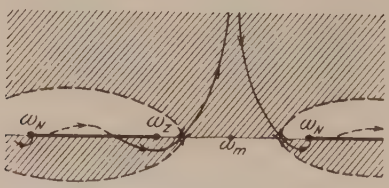
Vorlaufs nur die beiden Sattelpunkte des D_∞-Gebiets zu P bei [1]), da alle anderen in schraffierten Gebieten liegen, also nur verschwindende Beiträge liefern; es kommen also, wie § 6 ergab, zunächst die hohen Frequenzen: $|\omega| > |\omega_{z\max}|$ an, deren Periode entsprechend der Wanderung der D_∞-Sattelpunkte



Ausschnitt der ω-Ebene für $T = T_m$
Fig. 14



Ausschnitt der ω-Ebene für $T > T_m$
Fig. 15



Ausschnitt der ω-Ebene für $T \gg T_m$
Fig. 16

und deren Amplitude entsprechend dem Faktor F_s in (65) mit T zunimmt. Der Beitrag P_μ irgendeines anderen D-Gebietes: D_μ macht sich erst in einem Zeitintervall um dessen Zeit $T_{m\mu}$ herum bemerkbar: Merklich vorher ist er nach (65), (66), (75) ein mit x exponentiell verschwindender, mit t exponentiell ansteigender Term, merklich nachher sind es 2 mit den be-

1) Das entspricht der asymptotischen Darstellung der in (46), (47), auftretenden Besselschen Funktionen nach Debye (L 8).

treffenden Frequenzen ω_s oszillierende Terme; wir bezeichnen daher sinngemäß $T_{m\mu}$ als „Quasilatenzzeit von D_μ". — Zur Darstellung des Vorgangs in einem gewissen Zeitintervall um $T_{m\mu}$, dem „Quasilatenzübergang von T_μ", der den Übergang zwischen dem aperiodischen und oszillierenden Zustand von P_μ vermittelt, ist eine Darstellung der Form (65) sicher unbrauchbar, da diese genügend großes $\sqrt{|k_s''|}\,x$ zur Voraussetzung hat, aber $k_m'' = 0$ ist. — Wegen des Amplitudenfaktors $\frac{1}{\sqrt{|k_s''|}}$ nehmen dann mit wachsendem T die oszillierenden Terme schließlich wieder zu 0 ab entsprechend der Wanderung der Sattelpunkte nach den Grenzfrequenzen. Der geschilderte Vorgang spielt sich in allen D-Gebieten, natürlich quantitativ und zeitlich verschieden, ab. Zusammengenommen erfolgt in dieser Weise der Ablauf eines Signals ohne Hauptfrequenz (§ 5).

Hierzu ist noch der Nachweis zu erbringen, daß tatsächlich alle Quasilatenzzeiten größer sind als die Latenzzeit:

(76) $t_{m\mu} > t_0$ bzw. $T_{m\mu} > \frac{1}{v_k}$(§ 6) für alle $\mu = 1, 2, \ldots r$.

Dies läßt sich direkt aus der bekannten Anordnung der Stellen ω_g beweisen; indem man dieselben nach § 6 von D_∞ aus numeriert, schreibt man nach (25b), (26b):

$$R(\omega) = \frac{\prod_{\varkappa=1}^{r+1} (\omega^2 - \omega^2{}_{z\varkappa})}{\prod_{\varkappa=1}^{r} (\omega^2 - \omega^2{}_{N\varkappa})} \cdot$$

Wir zeigen für ein beliebiges D_μ: $T_{m\mu} > \frac{1}{v_k}$. Hierzu ordnen wir um:

$$R(\omega) = \left(\frac{\omega}{v_k}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_{z\mu}}{\omega}\right)^2\right] \prod_{\varkappa=1}^{\mu-1} \left(\frac{\omega_{z\varkappa}}{\omega_{N\varkappa}}\right)^2$$

$$\cdot \prod_{\varkappa=1}^{\mu-1} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{z\varkappa}}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{N\varkappa}}\right)^2} \cdot \prod_{\varkappa=\mu}^{r} \frac{1 - \left(\frac{\omega_{z(\varkappa+1)}}{\omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega_{N\varkappa}}{\omega}\right)^2} \quad \text{[vgl. (42)]}$$

$$= \left(\frac{\omega}{v_k}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_{s\mu}}{\omega}\right)^2\right] \cdot C_\mu{}^2 \cdot \Pi_{1\mu}(\omega^2) \cdot \Pi_{2\mu}(\omega^2).$$

Hierbei ist: $C_\mu^2 > 1$ sowie in D_μ, d. h. für

$$\omega^2{}_{N_\mu} > \omega^2 > \omega^2{}_{z(\mu+1)}:$$

$$\Pi_{1\mu}(\omega^2) > 1;\ \Pi_{2\mu}(\omega^2) > 1;\ \frac{d}{d\omega^2}\Pi_{1\mu}(\omega^2) > 0;\ \frac{d}{d\omega^2}\Pi_{2\mu}(\omega^2) > 0,$$

wie eine elementare Rechnung zeigt. Man kann also schreiben:

$$k(\omega) = \sqrt{R(\omega)} = \frac{\omega}{v_k}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{z\mu}}{\omega}\right)^2}\cdot F_\mu(\omega^2),$$

wobei in D_μ: $F_\mu(\omega^2) > 1$; $\frac{dF_\mu}{d\omega^2} > 0$. Daher ist:

$$v_k \cdot k'(\omega) = F_\mu \cdot \frac{d}{d\omega}\left(\sqrt{\omega^2 - \omega^2{}_{z\mu}}\right) + \frac{dF_\mu}{d\omega^2}\cdot 2\omega^2\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{z\mu}}{\omega}\right)^2}$$

$$> \frac{d}{d\omega}\left(\sqrt{\omega^2 - \omega_{z\mu}^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{z\mu}}{\omega}\right)^2}} > 1$$

für alle ω in D_μ, also auch $\omega_{m\mu}$, q. e. d.

§ 10. Fortpflanzung von Signalen mit Hauptfrequenz; Signalzeit. „Hauptübergang (Aufschaukelzeit)" und „Quasilatenzübergang". Versagen der abgekürzten Sattelpunktsintegration

Der Ablauf eines Signals mit Hauptfrequenz α verhält sich von einer gewissen Zeit an wesentlich anders als der im vorigen Paragraphen besprochene: Wegen des Faktors $\frac{1}{\omega_s - \alpha}$ wird hier der Beitrag des D_α-Gebietes bald nach dessen Quasilatenzzeit alle anderen Terme überwiegen und in dem Maße, wie sich ein Sattelpunkt der Stelle α nähert, stark anwachsen; er sei daher als Hauptterm P_h bezeichnet. Die Darstellung (65), (66) muß in einem Gebiet um

$$T = T_\alpha = k'_\alpha \tag{77}$$

herum versagen, da dann ω_s nahe α liegt, also die Beifunktion in (29) nicht mehr langsam veränderlich gegen die Exponentialfunktion ist [vgl. § 8]. Später, wenn T merkl. $> T_\alpha$, also (66) wieder anwendbar ist, liefert das Sattelpunktsintegral einen mit T abnehmenden flüchtigen Term; außerdem ist aber, da der Integrationsweg über den Pol α hinweggewandert ist, dessen Residuum zu berücksichtigen, welches nach (29), (30) den stationären Zustand P_α ergibt:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(\alpha)}\frac{e^{i(\omega t - kx)}}{\omega - \alpha}\,d\omega = P_\alpha = e^{i[\alpha t - k(\alpha)x]}, \tag{78}$$

dessen Amplitude wegen der Verlustfreiheit $|P_\alpha| = |P_0| = 1$ ist. Die flüchtigen Bestandteile sind von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{|k_s''|x}}$; während also merklich vor $T = T_\alpha$ das Signal dem Betrage nach etwa

$$|P| \sim \sum_{(\omega_s)} \frac{1}{(\omega_s - \alpha)\sqrt{2\pi|k_s''|x}} \tag{79a}$$

war, ist es nachher:

$$P = P_\alpha + \text{Zusatzglieder v. d. Ordnung } \frac{1}{(\omega_s - \alpha)\sqrt{2\pi|k_s''|x}}. \tag{79b}$$

Hiernach wird man sinnvoll unter T_α bzw. t_α (77) die Signalzeit bzw. unter $\frac{1}{T_\alpha}$ die Signalgeschwindigkeit von α verstehen; eine einfache Überlegung, die hier übergangen wird, da sie unten allgemeiner durchgeführt wird, lehrt, daß zur Signalzeit gerade: $P \approx P_h = \frac{1}{2} P_\alpha$ ist.

Ein großer Mangel der bisherigen Rechnung liegt darin, daß sie gerade im „Hauptübergang", wo eine relativ rasche Aufschaukelung der Signalamplitude stattfindet, versagt, ebenso beim Quasilatenzübergang; denn außer der Quasilatenzzeit des D_α-Gebietes und der Signalzeit selbst ist gerade die Ausdehnung der Übergangsabschnitte für den Signalablauf charakteristisch. Trotzdem hier die zu (65) führende Rechnung nicht anwendbar ist, ist man doch schon in der Lage, hierüber größenordnungsmäßige Angaben zu machen: In § 8, speziell (58) war die langsame Veränderlichkeit von $F(\eta) = \frac{1}{\eta - \eta_\alpha}$ $(\eta_\alpha = \alpha - \omega_s)$ gegenüber $e^{-i\frac{k_s'' x}{2!}\eta^2}$ vorausgesetzt, also, da $|\eta_\alpha|$ der Konvergenzradius der Potenzentwicklung von $F(\eta)$ ist,

$$e^{-\frac{|k_s''|x}{2!}|\eta_\alpha|^2} \text{ genügend} < < 1.$$

Das Hauptübergangsgebiet ist also dadurch bestimmt, daß diese Bedingung dort nicht erfüllt ist, d. h. $|\eta_\alpha| \sqrt{\frac{|k_s''|x}{2}}$ unter einer gewissen Schranke liegt. Da dann $|\eta_\alpha|$ klein ist, gilt:

$$k_s'' \approx k_\alpha''; \; k_s' - k_\alpha'' = T - T_\alpha \approx k_\alpha''(\omega_s - \alpha) = -k_\alpha'' \eta_\alpha,$$

also:

$$|\eta_a| \sqrt{\frac{|k_s''|x}{2}} \approx \frac{1}{2} \frac{t - t_\alpha}{\sqrt{\frac{|k_a''|x}{2!}}} \equiv \frac{\varkappa_a}{2}. \tag{80}$$

Im Hauptübergang muß daher sein:

$$|\varkappa_a| \leqq \varkappa_a^{(0)};\ e^{-\left[\frac{\varkappa_a^{(0)}}{2}\right]^2} \text{ genügend} << 1, \tag{81a}$$

worin $\varkappa_a^{(0)}$ eine nach (81a) geeignet zu wählende Zahl ist; seine Ausdehnung t_h, die „Aufschaukelzeit", wird also:

$$t_h = 2\varkappa_a^{(0)} \sqrt{\frac{|k_a''|x}{2!}}. \tag{81b}$$

Auf Grund einer analogen Überlegung wird der Quasilatenzübergang t_q, zu definieren sein durch:

$$|\varkappa_m| \equiv \frac{|t - t_m|}{\sqrt[3]{\frac{k_m''' x}{3!}}} \leqq \varkappa_m^{(0)};\ t_q = 2\varkappa_m^{(0)} \sqrt[3]{\frac{k_m''' x}{3!}}. \tag{82}$$

(80)—(82) zeigen die Abhängigkeit der Übergangsabschnitte von Dispersion und Eindringtiefe bis auf die eingehenden Konstanten $\varkappa_a^{(0)}$ und $\varkappa_m^{(0)}$. Über deren Größe kann vorläufig noch gar nichts ausgesagt werden, doch besteht hier prinzipiell die Möglichkeit numerischer Abschätzung. Dagegen fehlt zunächst eine Darstellung des Verlaufs von P, der zu allen anderen Zeiten durch (65), (66) gut beschrieben wird, gerade in diesen charakteristischen Gebieten vollkommen. Diese Lücke wird die Verallgemeinerung der Sattelpunktsmethode ausfüllen.

§ 11. Die verallgemeinerte Sattelpunktsintegrationsmethode[1])

Schwierigkeiten, bei denen die Sattelpunktsintegration in der abgekürzten Form (§ 8; dort Literatur) versagte, traten dann ein, wenn ein Sattelpunkt ω_s in Bereiche kam, wo das Glied zweiter Ordnung der Exponentenfunktion eine Nullstelle (Quasilatenzübergang) oder wo die Beifunktion einen Pol hatte (Hauptübergang); eine ähnliche Schwierigkeit, die auch bei den

1) Dieser Paragraph kann für sich gelesen werden.

vorliegenden Fragen auftreten wird, entsteht dann, wenn ω_s in die Nähe von Stellen kommt, wo zwar das Glied zweiter Ordnung nicht klein, aber die folgenden von gleichem Einfluß werden (das ist z. B. der Fall, wenn α nahe einer Stelle ω_z liegt). Im folgenden wird gezeigt, wie man in solchen Fällen, deren Komplikation im Grunde die gleiche, nämlich die nicht mehr genügend rasche Veränderlichkeit des Gliedes zweiter Ordnung gegenüber allen anderen ist, die Sattelpunktsintegration auszuführen hat. Es wird darauf hingewiesen, daß die Resultate dieses und des folgenden Abschnittes zum Teil in spezieller Form schon von Debye (L 8) und Pollaczek (L 20, 22) angegeben wurden.

Die Integrale, für die die Sattelpunktsmethode geeignet ist, haben die allgemeine Form:

$$J(x) = \int F(\omega) e^{-i x f(\omega)} d\omega \tag{83}$$

bei genügend großem Parameter x (vgl. § 7, Anfang). Die Sattelpunkte liegen an den durch

$$f'(\omega_s) = 0 \tag{84}$$

bestimmten Stellen ω_s. Die Führung von (83) über einen solchen längs der Fallinie ist gleichbedeutend mit der Substitution:

$$-i v^2 = f(\omega) - f(\omega_s) \equiv f^*(\eta; \omega_s); \quad \eta = \omega - \omega_s, \tag{85}$$

wenn man den Weg längs der reellen v-Achse wählt (L 7, L 6, S. 435); dann nimmt (83) mit der Umkehrung $\eta = \eta(v)$ von (85) und der Schreibweise:

$$F[\eta(v)] \frac{d\eta(v)}{dv} = G(v) \tag{86}$$

die Gestalt

$$J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(v) e^{-x v^2} dv \tag{87}$$

an.

Da der von (83) zu (87) führende Schritt nur eine formale Transformation bedeutet, ist von ihm eine einfachere Ausführung des Integrals, die ja angestrebt wird, gar nicht zu erwarten; zwei Schwierigkeiten liegen hier vor; erstens wird man nur in sehr einfachen Fällen in der Lage sein, die in (85)

implizit definierte Funktion $\eta(v)$ explizit anzugeben und damit (86), (87) wirklich zu bilden, und zweitens, falls selbst diese Möglichkeit besteht, (87) in geschlossener Form auszuwerten. Das letztere ist aber eben mit Rücksicht auf die Größe von x auch gar nicht erforderlich, da man nur einen leicht abschätzbaren (prozentualen) Fehler von der Ordnung:

$$e^{-x^2} \tag{88a}$$

macht, wenn man (87) nur im Gebiet:

$$|v| \leqq v_0 = \frac{x}{\sqrt{x}} \tag{88b}$$

führt:

$$J(x) \approx \int_{-v_0}^{+v_0} G(v) e^{-xv^2} \, dv. \tag{89}$$

Dann kommen zwei Möglichkeiten, (89) in vereinfachter Weise auszuwerten, in Frage:

a) Man kann eine einfachere Funktion $v^*(\eta)$ angeben, die sich im Gebiet (88b) um weniger als ε von $v(\eta)$ unterscheidet und deren Umkehrung $\eta(v^*)$ in geschlossener Form einfach zu bilden ist; dann kann man mit angebbarem Fehler (89) in der Form:

$$J(x) \approx \int_{-v_0^*}^{+v_0^*} G(v^*) e^{-xv^{*2}} dv^* \tag{90}$$

wirklich herstellen und, eventuell durch Reihenentwicklung von $G(v^*)$, mittels bekannter Funktionen auswerten; die Ausdehnung der Grenzen nach $\pm\infty$ unter Beibehaltung der Form des Integranden, die zu einem Ergebnis von erheblich einfacherer Gestalt führt, wäre mit einem weiteren, ebenfalls nach bekannten Methoden (vgl. z. B. L 24, S. 50; L 8, S. 543; L 7, S. 431ff.) abschätzbaren (prozentualen) Fehler von der Ordnung

$$\frac{1}{x^2} \tag{91}$$

verbunden. Diese an anderer Stelle benutzte Methode sei im Gegensatz zu der unter b) folgenden als „vollständige Sattelpunktsintegration“ (VSa) bezeichnet, da bei ihr $\eta(v^*)$ in geschlossener Form benutzt wird.

b) Man entwickelt $v(\eta)$ (85) in der Umgebung von $v = 0$ ($\eta = 0$) in eine Taylorsche Reihe, deren Inverse man bilden kann; das ist diejenige der nicht geschlossen angebbaren Funktion $\eta(v)$. Entwickelt man in gleicher Weise $G[\eta(v)]$, so kann man formal (89) durch gliedweise Integration auswerten — eventuell bei Ausdehnung der Grenzen nach $\pm\infty$ mit einem zusätzlichen Fehler wie bei a) angegeben —. Dieses Verfahren ist nur dann gerechtfertigt, wenn die Konvergenzradien v_1 und v_2 der Entwicklung von $\eta(v)$ bzw. $G[\eta(v)]$ größer als v_0 (88b) sind:

$$\left.\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}\right\} > v_0 . \tag{92}$$

Die Bedingung (92) kann man aber in unmittelbarerer Form aussprechen. Da nämlich der Integrand nur vom Sattelpunkt aus entwickelt, aber auch nicht teilweise geschlossen umgeformt wurde, ist die Einführung von v überhaupt überflüssig; denn identisch die gleiche Entwicklung wie mittels b) muß man erhalten, wenn man $F(\eta)$ und $f(\eta)$ bzw. $f^*(\eta)$ in der ursprünglichen Variablen ω bzw. η entwickelt und gliedweise in Richtung des stärksten Gefälles des Exponentengliedes 2. Ordnung integriert. Das ist nun gerade das in § 8 durchgeführte Verfahren mit dem Ergebnis (65), das jetzt sinngemäß als „Abgekürzte Sattelpunktsintegration II. Ordnung" (*K Sa* II) bezeichnet wird. Die Bedingung (92) verlangt dann folgendes: Es sei wieder eine Größe η_0 definiert, so daß für das Glied 2. Ordnung von (83) gilt:

$$e^{-\frac{|f_0''|}{2!} x \eta_0^2} = e^{-x^2} < \varepsilon; \quad f_0'' \equiv \left(\frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2}\right)_{\eta=0}. \tag{93}$$

Dann müssen die Konvergenzradien η_1 und η_2 der Entwicklungen von $f(\eta)$ bzw. $f^*(\eta)$ und $F(\eta)$ größer als η_0 sein:

$$\left.\begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{matrix}\right\} > \eta_0 , \tag{94}$$

falls die *K Sa* II-Integration ohne zu erheblichen Fehler $\delta(\varepsilon)$ ausführbar sein soll. (94) ist nicht erfüllt in Gebieten, wo η_1 zu klein oder η_2 zu klein oder η_0 zu groß ist. Im ersten Fall führt nur die *V Sa*-Methode a) zum Ziel; wie man in den

beiden anderen zu verfahren hat, und wie groß die Reichweite der *K Sa* II-Integration unter solchen Umständen ist, zeigt die folgende Untersuchung.

Da man hier voraussetzen kann, daß η_1 groß ist, also etwa:

$$e^{-\eta_1^2} \ll e^{-\varkappa^2} \quad \text{[vgl. (93)]}, \tag{95}$$

kann man den Ansatz vereinfachen, indem man die Entwicklung von $f(\eta)$ mit einem kleinen angebbaren Fehler hinter dem dritten oder, falls auch $|f_0'''|$ klein ist, hinter dem vierten Glied, das dann in erster Linie maßgeblich ist, usw. abbricht, da wegen (95) die Glieder schließlich stark abnehmen müssen. Die Fragestellung soll nun in diesem Sinne verallgemeinert werden, indem nicht gerade ein Überwiegen des Gliedes 2. Ordnung: $x\frac{f_0''}{2!}\eta^2$, sondern allgemein p-ter Ordnung zugrunde gelegt wird, was entsprechend „*K Sa p*“ zu nennen ist. Der Ausgangspunkt ist also ein *Sa*-Integral der Form:

$$J_{Sa} = \int_{Sa} G(\eta) e^{-i\mu_p^* \eta^p} d\mathfrak{p}\,, \tag{96}$$

und gefragt ist, wie man mit diesem zu verfahren hat, wenn $G(\eta)$:

1. von der Form:

$$G(\eta) = e^{-i\mu_q^* \eta^q}, \tag{97}$$

2. von der Form:

$$G(\eta) = \frac{1}{\eta - \eta_0} \tag{98}$$

ist, und wenn insbesondere der Parameter $\mu_q = |\mu_q^*|$ groß oder η_0 klein wird.

Zunächst werde (96) ohne Rücksicht auf diese Größenverhältnisse als *K Sa p*-Integration formal ausgeführt, indem man in zwei Richtungen stärksten Gefälles der Exponentialfunktion, die hier einen Winkel $\frac{2m\pi}{p}$; $m = 1, 2$ usw. miteinander bilden, unter Taylorentwicklung gliedweise integriert. Solche Richtungen ζ_p [vgl. (59) für $p = 2$] bestimmen sich aus:

$$\zeta_p^{(m)} = \frac{\left(2m - \frac{1}{2}\right)\pi - \gamma_p}{p}; \quad \gamma_p = \arg(\mu_p^*); \quad m = \text{ganzzahlig}. \tag{99}$$

Mittels der Substitution:

1. $\eta = s\, e^{i\zeta_p^{(1)}}$, $\quad -\infty \leqq s \leqq 0$; $\quad$ 2. $\eta = s\, e^{i\zeta_p^{(2)}}$, $\quad 0 \leqq s \leqq +\infty$

erhält man nach elementaren Umformungen aus (96) mit

$$G_0^{(\nu)} \equiv \left(\frac{d^{(\nu)}\, G}{d\, \eta^{(\nu)}}\right)_{\eta=0}:$$

$$(100) \qquad \begin{cases} J_{KSap} = 2\int_0^{\infty} (c_1 G_0 - c_2 G_0' s + c_3 G_0'' s^2 - \cdots) e^{-\mu_p s^p}\, ds; \\ \mu_p = |\mu_p^*|, \end{cases}$$

worin die $c_\varkappa$ von der Form:

$$e^{i\varkappa \frac{\zeta_p^{(1)} + \zeta_p^{(2)}}{2}} \cdot \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \frac{2\, l\pi}{p}; \quad l = \text{ganzzahlig}$$

sind, also $|c_\varkappa|$ von der Ordnung 1 und $c_p = c_{2p} = \cdots 0$ ist. Das wertet man mittels

$$(101) \qquad \int_0^{\infty} s^\nu\, e^{-\mu_p s^p}\, ds = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{p}\right)}{p\, \mu_p^{\frac{\nu+1}{p}}}$$

(Jahnke-Emde, S. 28) aus und bekommt:

$$(102) \qquad \begin{cases} J_{KSap} = \dfrac{2}{p} I\left(\dfrac{1}{p}\right) \dfrac{G_0}{\mu_p^{1/p}} \\ \left\{ c_1 - \dfrac{c_2}{\mu_p^{1/p}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \dfrac{G_0'}{1!\, G_0} + \dfrac{c_3}{\mu^{2/p}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \dfrac{G_0''}{2!\, G_0} - \cdots \right\}. \end{cases}$$

Die Frage ist nun, für welche Werte von μ_p diese formal gewonnene Entwicklung konvergiert oder im Falle asymptotischer Semikonvergenz brauchbare Werte liefert. Hierzu bildet man aus den Gliedern a_n der Reihe

$$(103) \qquad \lambda_{pr} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+r}}{a_n}\right|; \quad r = \text{endliche ganze Zahl};$$

(102) konvergiert bzw. divergiert, je nachdem $\lambda_{pr} \gtrless 1$ ist Mittels der Stirlingschen Formel findet man:

$$(104) \qquad \lambda_{pr} = p^{-\frac{r}{p}}\, \mu_p^{-\frac{1}{p}} \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^{r\left(1-\frac{1}{p}\right)}} \frac{G_0^{(n)}}{G_0^{(n-r)}}\right].$$

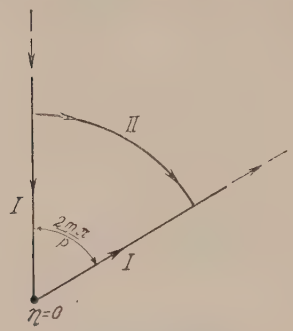
Zuerst untersuchen wir den Fall (97). Hier wird

$$\lambda_{pq} = \frac{\mu_q}{\mu_p^{1/p}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{q}{p}} \lim_{n\to\infty} n^{\frac{q}{p}-1} = \begin{cases} 0; & q < p \\ \infty; & q > p \end{cases}; \tag{105}$$

die Entwicklung (102) konvergiert also für $q < p$, divergiert für $q > p$, was man auch direkt durch Verlagerung des Integrationsweges von I nach II in Fig. 17 zeigen kann. Sie lautet hier:

$$\begin{cases} J_{KSap} = \dfrac{2}{p}\,\Gamma\left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot \dfrac{1}{\mu_p^{1/p}} \\ \quad \left\{ c_1 \pm c_{q+1} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{q+1}{p}\right)}{1!\,\Gamma\left(\dfrac{1}{p}\right)} \dfrac{\mu_q}{\mu_q^{q/p}} \pm c_{2q+1} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{2q+1}{p}\right)}{2!\,\Gamma\left(\dfrac{1}{p}\right)} \left(\dfrac{\mu_q}{\mu_p^{q/p}}\right)^2 \pm \cdots \right\} \end{cases} \tag{106}$$

ist also eine Potenzentwicklung nach $\frac{\mu_q}{\mu_p^{q/p}}$; entsprechend erhielte man hier die Auswertung des Integrals als $KSaq$-Integration durch Vertauschen von p und q. Für $q > p$, wo (106) eine alternierende divergente, und zwar in dem hier interessierenden Falle großer μ_p eine asymptotische semikonvergente Entwicklung im Sinne Poincarés ist, kann man in ähnlicher Weise, wie es bekanntlich in Fällen bei $p = 2$ möglich ist (vgl. z. B. L 24, S. 52; L 8, S. 543), zeigen, daß sie folgende Eigenschaft hat: Bricht man sie an einer Stelle ab, wo die Glieder noch dem Betrage nach abnehmen, so ist der Fehlerbetrag des Resultats kleiner als der des folgenden Gliedes. Wendet man das auf (106) an, so gilt: Sei ν_{qp} der Index, bis zu dem die Glieder abnehmen, so kann der prozentuale Fehler von (106):



Zwei mögliche Integrationswege
Fig. 17

$$|\varepsilon_{pq}| < |C_{pq}| \frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu_{qp}(q+1)}{p}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{p}\right)} \left(\frac{\mu_q}{\mu_p^{q/p}}\right)^{\nu_{qp}}; \quad |C_{pq}| \sim 1 \tag{107}$$

gemacht werden. Gibt man nun umgekehrt einen maximalen Fehler ε vor, so wird hierdurch der Gültigkeitsbereich der Entwicklung (106) eingeschränkt:

$$(108)\qquad \varkappa_{pq} \equiv \frac{\mu_p^{1/p}}{\mu^{1/q}} \geqq \left(\frac{\varepsilon}{|C_{pq}|} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_{pq}(q+1)}{p}\right)} \right)^{\frac{1}{q\nu_{pq}}} \equiv \varkappa_{pq}^{(0)}(\varepsilon).$$

Für kleinere Werte des charakteristischen Parameters $\varkappa_p$ [vgl. hiermit und dem folgenden (80)—(82)] ist die konvergente Entwicklung J_{KSaq} zu benutzen. Diese schreitet nach steigenden Potenzen von:

$$(109)\qquad \frac{\mu_p}{\mu_q^{p/q}} = \varkappa_{qp}^{-p} = \varkappa_{pq}^{p}$$

fort, konvergiert also gerade in dem Gebiet, wo (106) versagt, besonders gut.

Wir fassen dieses Ergebnis, das für die praktische Ausführung der verallgemeinerten Sattelpunktsintegration wichtig ist[1]), zusammen: das Sattelpunktsintegral von der Form:

$$J_{Sa} = \int_{Sa} e^{-i\mu_q^* \eta^q - i\mu_p^* \eta^p} d\eta; \quad p < q$$

läßt sich im Gebiet:

$$\frac{\mu_p^{1/p}}{\mu_q^{1/q}} \equiv \varkappa_{pq} \geqq \varkappa_{pq}^{(0)}(\varepsilon)$$

mittels Integration p-ter Ordnung als semikonvergente Entwicklung nach fallenden Potenzen von $\varkappa_{pq}^{q}$ mit einem prozentualen Fehler kleiner als ε auswerten, in dem

$$(110)\qquad \text{„Übergangsgebiet“}\quad \varkappa_{pq} \leqq \varkappa_{pq}^{(0)}(\varepsilon)$$

als absolut konvergente Entwicklung nach steigenden Potenzen von $\varkappa_{qp}^{p}$, die gerade in (110) besonders rasch konvergiert; praktisch ist es also für alle Werte von $\varkappa_{pq}$ möglich, das Integral mittels weniger Glieder einer geeigneten Entwicklung zu berechnen. — Die Bedingung (108), (110) kann man wie in (58) bzw. (81a) ausdrücken: Im Geltungsbereich der asymptotischen Entwicklung muß das Glied p-ter Ordnung rasch ver-

1) Vgl. L 8, S. 557 Anmerkung.

änderlich gegen das q-ter Ordnung sein, d. h. es muß eine Größenordnung η_0 geben, so daß für $e^{-\mu_p \eta_0^p} \ll 1 \quad e^{+\mu_q \eta_0^q}$ noch nicht $\geqslant 1$; das führt ebenfalls auf (108), (110). — Die hier eingeführten Größen $\varkappa_{pq}^{(0)}(\varepsilon)$ lassen sich bei vorgegebenem ε gemäß ihrer Definition leicht numerisch berechnen; so findet man z. B. für $\varepsilon \lesssim 10$ Proz.:

$$\varkappa_{23}^{(0)} \approx 1{,}4\,, \tag{111}$$

woraus sich mittels einfacher Umformung die in (82) eingehende Konstante ergibt (Quasilatenzübergang).

Der andere hier interessierende Fall ist (98); dort ist nach (104):

$$\lambda_{p1} = \frac{1}{\eta_0 (p\,\mu_p)^{1/p}} \cdot \lim_{n \to \infty} n^{1/p} = \infty\,,$$

also die Entwicklung (102) stets divergent bzw. semikonvergent; sie lautet:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{K\,Sa\,p} = \dfrac{2}{p}\,\Gamma\left(\dfrac{1}{p}\right) \cdot \dfrac{1}{\eta_0\,\mu_p^{\,1/p}} \\ \qquad \left\{ c_1 - c_2 \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{2}{p}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{p}\right)} \dfrac{1}{\eta_0\,\mu_p^{\,1/p}} + c_3 \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{p}\right)} \dfrac{1}{(\eta_0\,\mu_p^{\,1/p})^2} - \cdots \right\}. \end{array} \right. \tag{112}$$

Man kann diesen Fall formal auf den soeben behandelten mit $q = 0$ zurückführen, indem man schreibt:

$$\frac{1}{\eta - \eta_0} = e^{-\log(\eta - \eta_0)}.$$

Der $\varkappa_{pq}$ entsprechende charakteristische Parameter ist dann:

$$\varkappa_{p\,\eta_0} = \eta_0\,\mu_p^{1/p} \tag{113}$$

und der Geltungsbereich der Entwicklung (112) durch eine (108) entsprechende Bedingung der Form:

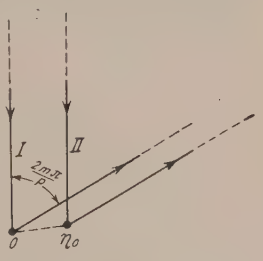
$$\varkappa_{p\,\eta_0} \gtrless \varkappa_{p\,\eta_0}^{(0)}(\varepsilon) \tag{114}$$

begrenzt, die man auch in der (58) bzw. (81a) entsprechenden Form:

$$e^{-\eta_0^p \cdot \mu_p} \ll 1 \tag{114a}$$

schreiben kann; sie besagt, daß in dem durch (114) ausgeschlossenen Übergangsgebiet [vgl. (110)] die Polfunktion (98) „nullter Ordnung“ als der rascher veränderliche Teil des Integranden anzusehen ist. Zu einer für das Übergangsgebiet

geeigneten konvergenten Entwicklung nach steigenden Potenzen von $\varkappa_{p\eta_0}$ kommt also durch sinngemäße Übertragung der oben angewendeten Methode: dort wurde der den Winke $\frac{2m\pi}{p}$ einschließende Gefälleweg in einen mit dem Winkel $\frac{2m\pi}{q}$ verwandelt, also hat hier eine Parallelverschiebung des Gefälleweges um η_0 zu erfolgen[1]), so daß als Anfangspunkt der Entwicklung der Pol selbst gewählt wird, wie es Fig. 18 zeigt; dadurch wird die raschere Veränderlichkeit der Polfunktion dokumentiert. Zugleich zeigt sich hierin der eigentliche Sinn der verallgemeinerten Sattelpunktsmethode: es kommt nicht eigentlich darauf an, das Integral zwischen zwei „Tal"gebieten über den „Paß" als minimales Maximum zu führen (vgl. die Bezeichnung „Paßmethode"), sondern auf einem Wege, der einerseits möglichst kurz ist, längs dessen aber andererseits der Integrand ein möglichst einfaches Verhalten zeigt, d. h. mit Hilfe einer einzigen Entwicklung darstellbar ist. Das wäre z. B. auf dem „Paßweg" I von Fig. 18 bei $\varkappa_{p\eta_0} < \varkappa^{(0)}_{p\eta_0}$ nicht der Fall, da hier $\frac{1}{\eta - \eta_0}$ für $\eta < \eta_0$ nach steigenden, für $\eta > \eta_0$ nach fallenden Potenzen zu entwickeln wäre, was zwar (im einfachsten Falle $p = 2$) mittels bekannter Funktionen auswertbar wäre, aber zu einem Ergebnis von sehr undurchsichtiger Form führen würde im Gegensatz zu der von η_0 ausgehenden Entwicklung längs des „Kurzweges" II, bei der diese Schwierigkeit fortfällt. Daher wird hierfür die Bezeichnung „Kurzwegintegration p-ter Ordnung" ($Ku\,p$) gewählt.



Verschiebung des Integrationsweges

Fig. 18

Mit $\sigma = \eta - \eta_0$ erhält man aus (96), (98) für das $Ku\,p$-Integral:

$$J_{Ku\,p} = \int_{Ku\,p} \frac{e^{i\mu^*_p(\sigma+\eta_0)^p}}{\sigma}\, d\sigma. \tag{115}$$

1) Vgl. auch L 22, Fig. 5.

Da $d\sigma/\sigma$ auf den geradlinigen Strecken unabhängig von der Richtung derselben ist, heben sich deren Unendlichkeiten bei $\sigma = 0$ auf, da die eine nach innen, die andere nach außen durchlaufen wird. Man kann also, anstatt sie bis nach dem Pol hineinzuführen, diesen in einem kleinen Bogen mit dem Winkel $\frac{2m\pi}{p}$ umfahren und erkennt so, daß (115) außer den Beiträgen der beiden geradlinigen Stücke noch den p/m-ten Teil des Residuums bei $\sigma = 0$ liefert. Man erhält also im ganzen [vgl. (99)]:

$$J_{Kup} = \frac{2\pi i m}{p} e^{-i\mu_p^* \eta_0^p} + \int_{-\infty}^{0} \frac{ds}{s} e^{-\mu_p \left| s + e^{-i\zeta_p^{(1)}} \eta_0 \right|^p}$$

$$+ \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-\mu_p \left[s + e^{-i\zeta_p^{(2)}} \eta_0 \right]^p} = \frac{2\pi i m}{p} e^{-i\gamma_p \varkappa_{p\,\eta_0}^p}$$

$$+ \left\{ - \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-\mu_p s^p + \binom{p}{1} \mu_p \eta_0 e^{-i\zeta_p^{(1)}} s^{p-1} - \cdots - (1)^p \mu_p \eta_0^p e^{-ip\zeta_p^{(1)}}} \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-\mu_p s^p - \binom{p}{1} \mu_p \eta_0 e^{-i\zeta_p^{(2)}} s^{p-1} - \cdots - \mu_p \eta_0^p e^{-ip\zeta_p^{(2)}}} \right\}.$$

Behält man hier nur das einzige den Faktor η_0 nicht enthaltende Glied $\mu_p s^p$ im Exponenten bei und entwickelt die übrigen in die Exponentialreihe, so erhält man durch Zusammenfassung der beiden Integrale ein Ergebnis von der Form:

$$J_{Kup} = \frac{2\pi i m}{p} e^{-i\gamma_p \varkappa_{p\,\eta_0}^p} + \int_0^{\infty} P(s)\, e^{-\mu_p s^p} ds,$$

worin $P(s)$ eine absolut und gleichmäßig konvergente Potenzreihe in s mit nicht verschwindendem konstantem Glied ist. Durch gliedweise Integration erhält man bei Berücksichtigung von (101) und (113):

$$(116) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{Kup} = \dfrac{2\pi i m}{p} e^{-i\gamma_p \varkappa_{p\,\eta_0}^p} + \Gamma\left(\dfrac{1}{p}\right) \varkappa_{p\,\eta_0}^{p-1} \\ \cdot \left\{ a_1 - a_2 \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{2}{p}\right)}{2!\,\Gamma\left(\dfrac{1}{p}\right)} p\, \varkappa_{p\,\eta_0}^{p-1} + a_3 \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{3}{p}\right)}{3!\,\Gamma\left(\dfrac{1}{p}\right)} \left(p\, \varkappa_{p\,\eta_0}^{p-1}\right)^2 - \cdots \right\}, \end{array} \right.$$

worin die in komplizierter Weise gebildeten $a_\varkappa$ absolut von der Ordnung 1 sind. Das ist die gesuchte konvergente Übergangsentwicklung nach steigenden Potenzen von $\varkappa_{p\,\eta_0}$. Bei $\varkappa_{p\,\eta_0} = 0$ reduziert sie sich auf das Residuum. Daraus können wir sofort für das uns interessierende Problem schließen: Zur Signalzeit T_α ist [vgl. Text vor (77), (78)]

$$P_h = \tfrac{1}{2} P_\alpha \quad (p = 2); \tag{117}$$

fällt α mit einer Frequenz ω_m zusammen, so gilt bei $T = T_\alpha = T_m$:

$$P_h = \tfrac{1}{3} P_\alpha \quad (p = 3). \tag{118}$$

§ 12. Anwendung: Berechnung von Haupt- und Quasilatenzübergang; Aufschaukelzeit und Frontverflachung

Wir werten mittels der verallgemeinerten Sattelpunktsmethode zuerst den Hauptübergang aus, — wobei zuerst α in hinreichender Entfernung von ω_m angenommen wird, so daß das Glied 3. Ordnung gegen das 2. Ordnung sehr langsam veränderlich ist —. Die außerhalb desselben gültige KSaII-Entwicklung (65) bzw. (102) mit $p = 2$ lautet bei Benutzung des entsprechenden dimensionslosen Parameters nach (113)

$$\varkappa_s = 2\,\varkappa_{2\,\eta_0} = 2(\omega_s - \alpha)\sqrt{\frac{|k_s''|x}{2!}}: \tag{119}$$

$$P_h = \frac{e^{i\left(\varphi_s \mp \frac{\pi}{4}\right)}}{2i\sqrt{\pi}\,\varkappa_s}\left\{1 \mp \frac{i}{2}\left(\frac{\varkappa_s}{2}\right)^{-2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\left(\frac{\varkappa_s}{2}\right)^{-4} \pm i\,\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2}\left(\frac{\varkappa_s}{2}\right)^{-6} + \cdots\right\}. \tag{120}$$

Das obere Vorzeichen gilt, falls $k_s'' > 0$ bzw. $\omega_N > \alpha > \omega_m$, das untere für $k_s'' < 0$, $\omega_m > \alpha > \omega_z$ (vgl. Fig. 8); der Einfachheit halber entscheiden wir uns hier für das eine, etwa das obere. — Man erkennt, daß (120) in den beiden Fällen (79) $T \gtrless T_\alpha$ nach (119) verschiedenes Vorzeichen hat, während des Hauptübergangs wechselt also der flüchtige Anteil die Phase (vgl. L 1, S. 226). Für den Hauptübergang selbst ist nach (80):

$$\varkappa_s \approx \varkappa_\alpha = \frac{t - t_\alpha}{\sqrt{\frac{|k_\alpha''|x}{2!}}}. \tag{121}$$

Bei Vorgabe von $\varepsilon < 10$ Proz. erhält man in elementarer Rechnung für (114):

$$\varkappa_a^{(0)} \approx 3{,}26\,, \tag{122}$$

also die Aufschaukelzeit [vgl. (81b)]:

$$t_h \approx 6{,}52 \sqrt{\frac{|k_a''|\,x}{2!}} \approx 4{,}6 \sqrt{|k_a''|\,x}\,; \tag{123}$$

die Größe (81a) bzw. (114a) bei $p = 2$ wäre hier:

$$e^{-\left(\frac{\varkappa_a^{(0)}}{2}\right)^2} \approx 7 \text{ Proz.} \tag{122a}$$

Die Übergangsentwicklung (116) für $p = 2$ nach Potenzen von $\varkappa_a$ ist die gesuchte Darstellung von P_h für $|\varkappa_a| \lesssim 3{,}26$. Da das Kurzwegintegral (115) hier auf eine bekannte Transzendente führt, werten wir es aber direkt aus; mit (78) wird:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_h = P_a(x,t) \\ \quad \cdot \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|k_a''|\,x}{2!}\sigma^2} \dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}(t-t_a)\sigma}}{\sigma}\, d\sigma \right]; \end{array} \right. \tag{124}$$

hieraus durch Differentation nach t, Vertauschung der Integrationsfolge und Fortfall der in σ ungeraden Teile:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_h = P_a \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\pi i} \displaystyle\int_0^{t-t_a} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-\frac{|k_a''|\,x}{2!}\sigma^2} e^{i\frac{\pi}{4}\tau\sigma}\, d\sigma\, d\tau \right] \\ = P_a \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\pi i} \displaystyle\int_0^{t-t_a} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-\frac{|k_a''|\,x}{2!}\sigma^2} \cos\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\tau\sigma\right) d\sigma\, d\tau \right] \\ = \dfrac{1}{2}\, P_a \left[1 + \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi\,|k_a'|\,x}} \displaystyle\int_0^{t-t_a} e^{i\left(\frac{\tau^2}{2\,|k_a''|\,x} - \frac{\pi}{4}\right)} d\tau \right]. \end{array} \right. \tag{125}$$

Die hierin auftretende transzendente Funktion

$$Fr\,(v) = \int_0^v e^{i\,u^2}\, du \quad \text{(Fresnelsche Funktion)} \tag{126}$$

ist für reelle v im wesentlichen mit den Fresnelschen Integralen[1]) identisch; mit Hilfe der Substitution $u^2 = z$ erhält man:

$$(127)\quad \begin{cases} Fr(v) = \frac{1}{2}\int_0^{v^2} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}\,dz \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[C(v^2) + i\,S(v^2)\right]; \begin{matrix} C(z) = \\ S(z) = \end{matrix} \Big\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z \begin{Bmatrix} \cos z \\ \sin z \end{Bmatrix} \frac{dz}{\sqrt{z}}. \end{cases}$$

Aus (125) wird also:

$$(128)\qquad P_h = \frac{1}{2}\,P_a(x,t)\left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\,Fr\left(\frac{\varkappa_a}{2}\right)\right].$$

Der Betrag des Faktors von P_a gibt an, wie sich die Amplitude der stationären Frequenz im Hauptübergang aufschaukelt; man erhält:

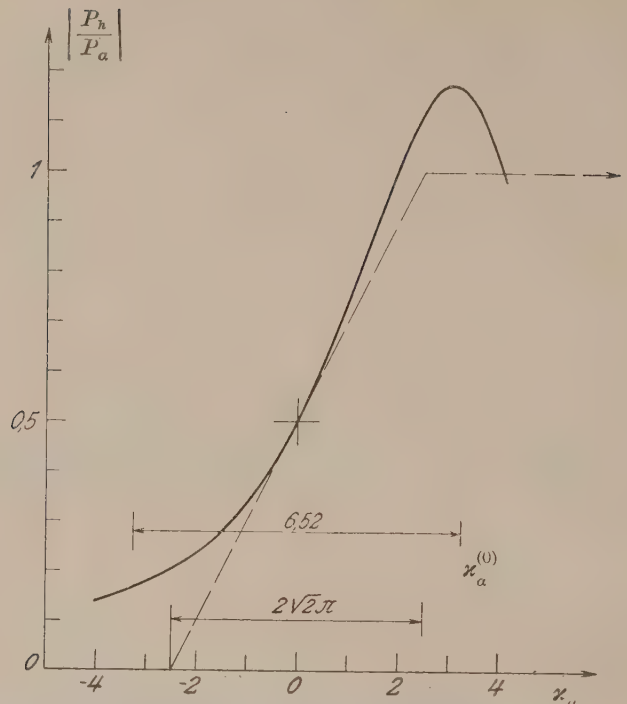
$$(129)\quad \left|\frac{P_h}{P_a}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left[1 + C\left(\left(\frac{\varkappa_a}{2}\right)^2\right) + S\left(\left(\frac{\varkappa_a}{2}\right)^2\right)\right]^2 + \left[C\left(\left(\frac{\varkappa_a}{2}\right)^2\right) - S\left(\left(\frac{\varkappa_a}{2}\right)^2\right)\right]^2}.$$

Den Verlauf dieser Funktion zeigt Fig. 19; der Maßstab ist $\varkappa_a$, also der im Verhältnis $1 : \sqrt{\frac{|k''_a x|}{2!}}$ verkürzte Zeitmaßstab. (129) erfüllt (117) und nähert sich für große negative $\varkappa_a$ monoton dem Wert 0, für positive mit Oszillationen abnehmender Amplitude und Periode dem Wert 1, doch sei betont, daß nur der mittlere Teil, der ungefähr durch (122) begrenzt und in Fig. 19 angedeutet ist, den Signalablauf mit guter Genauigkeit wiedergibt; außerhalb liefert die asymptotische Entwicklung (120) bzw. (79b) genauere Werte, da es bei der dann merklichen Größe von $|\omega_s - \alpha|$ nicht mehr richtig ist, die Polfunktion als den raschest veränderlichen Faktor anzusehen; das würde eine fehlerhafte Auswertung ergeben, weil dann das Glied 3. Ordnung nicht mehr relativ langsam veränderlich ist.

Als Funktion von $(\varkappa_a/2)^2$ ist (129) dieselbe, die in der Theorie der Beugung die Amplitudenverteilung der Fresnel-

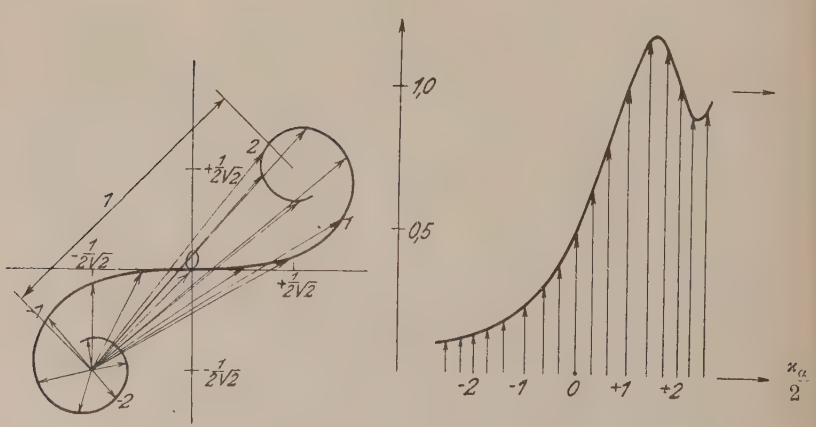
---

1) Jahnke-Emde, S. 23ff.; hier auch Tafeln von $C(z)$ und $S(z)$.



Signalfront in reduziertem Maßstab

Fig. 19



Konstruktion der Signalfront aus der Cornuschen Spirale

Fig. 20

schen Beugungsbilder an Schattenkanten wiedergibt.[1]) Die Form (118) legt nahe, sie, wie dort üblich, mit Hilfe der Cornuschen Spirale, der Abbildung der reellen Achse durch $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot Fr(v)$, zu konstruieren, wie es in Fig. 20 gezeigt ist.[2])

Mittels der Potenzentwicklung der Fresnelschen Integrale erhält man hier die Entwicklung (116) für $p = 2$:

$$(130)\quad \frac{P_h}{P_a} = \frac{1}{2} + e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{x_a}{\sqrt{\pi}} \left\{ 1 + i \frac{\left(\frac{x_a}{2}\right)^2}{3 \cdot 1!} - \frac{\left(\frac{x_a}{2}\right)^4}{5 \cdot 2!} - i \frac{\left(\frac{x_a}{2}\right)^6}{7 \cdot 3!} + \cdots \right\}$$

und entnimmt aus ihr als Neigung der Kurve (129) bei $t = t_a$:

$$(131)\quad \left\{ \left(\frac{d \left| \frac{P_h}{P_a} \right|}{d x_a} \right)_{x_a = 0} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \text{ bzw. } \left(\frac{d \left| \frac{P_h}{P_a} \right|}{dt} \right)_{t = t_a} = \frac{1}{2\sqrt{\pi |k_a''| x}}; \right.$$
$$\left. \left[\left(\frac{d \left| \frac{P_h}{P_a} \right|}{dt} \right)_{\max} \approx \frac{1{,}39}{2\sqrt{\pi |k_a''| x}} \right] \right\},$$

die Aufschaukelgeschwindigkeit des Signals, die mit $\sqrt{|k_a''| x}$ abnimmt. Ersetzt man in roher Näherung den Ablauf des Signals durch den gebrochenen Linienzug in Fig. 19 mit der Tangente an die Amplitudenkurve[3]), so wird die tangential definierte Aufschaukelzeit:

$$(132)\qquad t_h = 2\sqrt{\pi |k_a''| x}$$

— die mit der auf anderem Wege gewonnenen Bestimmung (123) nahezu übereinstimmt; vgl. Fig. 19 —. Die ursprünglich senkrechte Amplitudenfront des Einsatzsignals wird also beim Vordringen asymptotisch mit $\sqrt{|k_a''| x}$ abgeflacht. Daraus folgt z. B., daß ein plötzlich einsetzendes und wieder abbrechendes, während der Zeit t_1 mit der Amplitude 1 wirksames Signal der Frequenz α (Rechtecksignal, Telegraphiersignal), nur für $t_1 > t_h$, also etwa in Tiefen $x \lesssim \frac{t_1^2}{4\pi |k_a''|}$ eine Maximalamplitude von der Ordnung 1 erreicht!

---

1) Vgl. L 10, S. 247.

2) Vgl. Näheres z. B. in der Darstellung von Sommerfeld, L 29, S. 473.

3) Vgl. L 14, Figg. 5 und 6.

Benutzt man andererseits in (128) die asymptotischen Entwicklungen der Fresnelschen Integrale für große $|\varkappa_a|$, so erhält man:

$$(133)\qquad \begin{cases} \dfrac{P_h}{P_a} \approx \dfrac{1}{2}\left[1+\dfrac{\varkappa_a}{|\varkappa_a|}\right] - \dfrac{e^{i\left[\left(\frac{\varkappa_a}{2}\right)^2+\frac{\pi}{4}\right]}}{2\sqrt{\pi}\,\varkappa_a} \\ \qquad\qquad \cdot\left\{1-\dfrac{i}{2}\left(\dfrac{\varkappa_a}{2}\right)^{-2} - \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\left(\dfrac{\varkappa_a}{2}\right)^{-4}\cdots\right\}. \end{cases}$$

Man verifiziert leicht, daß das Hauptglied dieser Entwicklung bei Ersatz von $\varkappa_a$ durch $\varkappa_s$ (121) mit dem der auf ganz anderem Wege gewonnenen asymptotischen Entwicklung (120) bzw. (79b) übereinstimmt; das setzt nochmals die verbindende Funktion der mittels Kurzwegintegration gewonnenen Übergangsentwicklung in Evidenz und lehrt andererseits, daß (128), (129) außerhalb des Übergangsgebietes nicht angewendet werden soll, worauf schon dort hingewiesen wurde.

Zur Darstellung des Quasilatenzüberganges ist nach § 11 das Glied 3. Ordnung als das raschest veränderliche zu behandeln. Der dimensionslose charakteristische Parameter ist hier nach (108):

$$(134)\qquad \varkappa_{23} = \frac{\sqrt{\frac{|k'_s|x}{2!}}}{\sqrt[3]{\frac{|k''_s|x}{3!}}},$$

und die außerhalb des Übergangs, also nach (111) für $|\varkappa_{23}| \gtrsim 1{,}4$ gültige KSaII-Entwicklung des betreffenden Einzelterms läßt sich leicht aus der allgemeinen Form (65) analog zu (120) in die spezielle nach fallenden Potenzen von $\varkappa_{23}^2$ umschreiben, wobei hier, da $|\alpha - \omega_m|$ genügend groß vorausgesetzt ist, das Polglied als langsam veränderlich zu betrachten ist. — Als Gefällerichtungen, die einen Winkel von $\frac{2}{3}\pi$ bilden, findet man nach (99) und (71):

$$(135)\qquad \zeta_3 = -\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3}.$$

Den Integrationsweg und das Relief der Exponentialfunktion bei ω_m nach (71) und (73) zeigt Fig. 14. Aus einem praktischen Grunde soll aber der Integrationsweg während des ganzen Quasilatenzüberganges nicht nur in den Gefällerichtungen 3. Ordnung, sondern auch unter Parallelverschiebung

über den Tripelpunkt ω_m selbst statt über den jeweiligen Sattelpunkt ω_s, d. h. nach § 11 als *Ku III*-Integral geführt werden: Denn da bei ω_s das Glied 1. Ordnung, bei ω_m das Glied 2. Ordnung verschwindet, bekommt man so statt der Übergangsentwicklung nach Potenzen von $\varkappa_{23}$ eine solche nach $\varkappa_{13}$, und diese konvergiert, wie eine einfache Überlegung zeigt, dort rascher. Den betreffenden Parameter, der mit $\varkappa_m$ bezeichnet sei, erhält man nach dem analogen Verfahren aus $\varkappa_{23}$ wie in (80) $\varkappa_a$ aus $\varkappa_s$; mit $k_s''' \approx k_m'''$ und (72), (73) wird:

$$\varkappa_m = \frac{t - t_m}{\sqrt[3]{\frac{k_m''' x}{3!}}}, \tag{136}$$

also nach (111):

$$\varkappa_m^{(0)} \approx 1{,}29 \quad \text{bei } \varepsilon < 10 \text{ Proz.} \tag{137}$$

und damit der Quasilatenzübergang [vgl. (82)]:

$$t_q = \approx 1{,}42 \sqrt[3]{k_m''' x}\,. \tag{138}$$

Die konvergente Entwicklung stellt man nach dem Verfahren von § 11 her (wir bezeichnen den Übergangsterm mit P_q):

$$P_q = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ku\,III} F(\omega)\, e^{i(\omega t - k x)}\, d\omega$$

$$= \frac{F_m e^{i\varphi_m}}{2\pi i} \int_{Ku\,III} e^{i\left[t\eta_m - k_m' x \eta_m - \frac{k_m'''}{3!} x \eta_m^3\right]} d\eta_m$$

mit $\eta_m = \omega - \omega_m$, $\varphi_m = \omega_m t - k_m x$ [vgl. (55), (57)]; also nach (54):

$$P_q = \frac{F_m e^{i\varphi_m}}{2\pi i} \int_{Ku\,III} e^{-i\frac{k_m'''}{3!}\eta_m^3} e^{i(t-t_m)\eta_m} d\eta_m$$

$$= \frac{F_m e^{i\varphi_m}}{2\pi i} \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}} \int_{-\infty}^{0} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{\left[i e^{i\frac{\pi}{6}} (t - t_m) s\right]^\varkappa}{\varkappa!} e^{\frac{k_m''' x}{3!} s^3} ds \right.$$

$$\left. + e^{-i\frac{\pi}{6}} \int_{0}^{\infty} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{\left[i e^{i\frac{\pi}{6}} (t - t_m) s\right]^\varkappa}{\varkappa!} e^{-\frac{k_m''' x}{3!} s^3} ds \right\}$$

und nach (101):

$$(139)\quad \left\{ \begin{aligned} P_q &= \frac{F_m e^{i\varphi_m}}{2\pi i}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{k_m''' x}{3!}}}\left\{1+\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{1!\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\varkappa_m\right. \\ &\left. -\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{3!\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\varkappa_m^3-\frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{4!\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\varkappa_m^4+\frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{6!\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\varkappa_m^6\ldots\right\} \end{aligned} \right.$$

[Die Verwendung des Sattelpunktswegs anstatt des Kurzwegs würde bei $e^{i\varphi_s}\approx e^{i\left(\varphi_m+\frac{2}{3^{4/3}}\varkappa_m^{3/2}\right)}$ anstatt $e^{i\varphi_m}$ eine Entwicklung liefern, deren Glieder dem Betrage nach wie:

$$1;\ \frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{2!\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}3\varkappa_m;\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{3!\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}(3\varkappa_m)^{3/2};\ \ldots\ldots$$

fortschreiten, die also schlechter konvergieren würde]. Das Anwachsen von $|P_q|$ ergibt die Aufschaukelgeschwindigkeit, die Amplitudenzunahme beim Übergang vom aperiodischen zum oszillierenden Zustand:

$$(140)\quad \frac{1}{|F_m|}\,\frac{d|P_q|}{dt}=\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2\pi\sqrt{3}\left[\frac{k_m''' x}{3!}\right]^{2/3}}\left\{1-\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{2!\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\varkappa_m^2\ldots\right\}.$$

Wir betrachten jetzt den Fall $\alpha=\omega_m$. Hier ist nach § 11 *Ku III*-Integration über den Pol erforderlich; der charakteristische Parameter ist also wieder $\varkappa_m$ (136). Die hier zu beachtenden Kriterien bezüglich des Gültigkeitsbereichs der semikonvergenten Entwicklung sind wegen der Wirkung von α als Pol: $\varkappa_s\approx\varkappa_a\gtrsim 3{,}26$ (122), wegen der als Tripelpunkt: $\varkappa_m\gtrsim 1{,}29$ (137). Nach (72), (73) gilt hier: $\varkappa_s\approx 2\sqrt[4]{\frac{\varkappa_m^3}{3}}$, also ist die erste Bedingung, die $\varkappa_m\gtrsim 2{,}77$ verlangt, als die weitergehende maßgeblich:

$$(141)\qquad \varkappa_m^{(0)}\approx 2{,}77;$$

damit wird der hier den Quasilatenzübergang mitenthaltende Hauptübergang t_{hq}:

$$(142)\qquad t_{hq}=3{,}05\sqrt[3]{k_m''' x}.$$

Für die Übergangsentwicklung erhält man nach dem Verfahren (115), (116), wenn der Hauptterm hier mit P_{ha} bezeichnet wird:

$$P_{hq} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Ku\ III} \frac{e^{i(\omega t - k x)}}{\omega - \alpha}\, d\omega = P_a \left\{ \frac{1}{3} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Ku\ III} \frac{d\eta_m}{\eta_m}\, e^{-i\frac{k'''_m x}{3!}\eta_m^3}\, e^{i(t-t_a)\eta_m} \right\}; \quad \begin{pmatrix} \eta_m = \omega - \omega_m \\ = \omega_{\cdot} - \alpha \end{pmatrix};$$

$$\frac{P_{hq}}{P_a} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{k'''_m x}{3!}\sigma^3}\, e^{-\frac{t-t_m}{2}\sigma}\, \frac{\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(t-t_m)\sigma\right]}{\sigma}\, d\sigma,$$

$$(143) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{P_{hq}}{P_a} &= \frac{1}{3} + \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2\pi\sqrt{3}} \left\{ \frac{\varkappa_m}{1!} - \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{2!\,\Gamma(\frac{1}{3})}\varkappa_m^2 \right. \\ &\left. - \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{4!\,\Gamma(\frac{1}{3})}\varkappa_m^4 + \frac{\Gamma(\frac{5}{3})}{5!\,\Gamma(\frac{1}{3})}\varkappa_m^5 + \cdots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Diese Funktion, die die Aufschaukelung des stationären Signals während des Übergangs angibt, hat qualitativ einen ganz ähnlichen Verlauf wie (128) ÷ (130); sie ist in Fig. 21 wiedergegeben. Man könnte für (143) als Analogon zu (133) eine asymptotische Entwicklung für größere $\varkappa_m$ herleiten, doch sei hierauf verzichtet, da diese, wie im Anschluß an (129) bzw. (133) auseinandergesetzt, dort nicht mehr zweckmäßig wäre.[1]) Für die Aufschaukelgeschwindigkeit erhält man aus (143):

$$(144) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{d\left(\frac{P_{hq}}{P_a}\right)}{d\varkappa_m}\right)_{\varkappa_m = 0} = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2\pi\sqrt{3}} = 0{,}246; \\ &\left(\frac{d\left(\frac{P_{hq}}{P_a}\right)}{dt}\right)_{t_a} = \frac{0{,}447}{\sqrt[3]{k'''_m x}}; \quad \left[\left(\frac{d\left(\frac{P_{hq}}{P_a}\right)}{dt}\right)_{\max} \approx \frac{0{,}665}{\sqrt[3]{k'''_m x}}\right], \end{aligned} \right.$$

also die tangential definierte Aufschaukelzeit [vgl. (132)]:

$$(145) \qquad t_{hq} = 2{,}24\sqrt[3]{k'''_m x} \quad \text{[vgl. (142)]}.$$

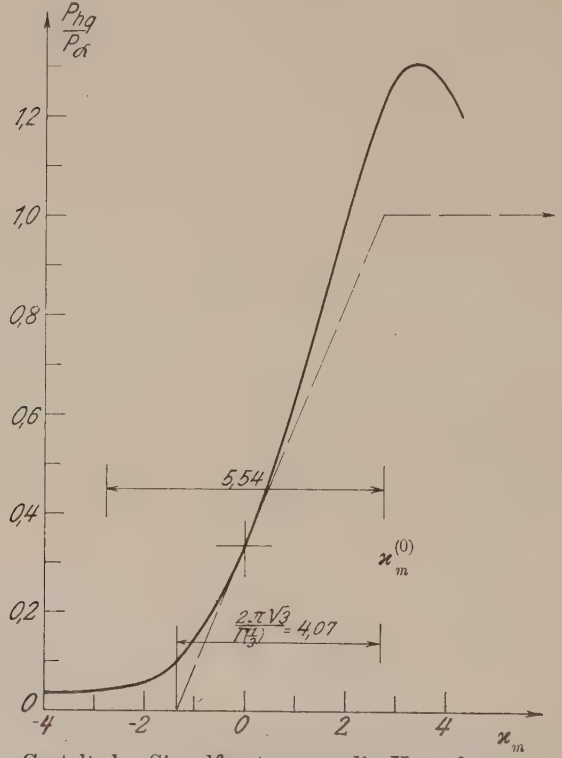
Man kann (wie in Fig. 19) die Amplitudenkurve roh durch gebrochenen Linienzug annähern. Wie ein Vergleich von Figg. 19 und 21 zeigt, steigt hier die Kurve plötzlicher an

---

1) F. Pollaczek verwendet in L 22, wo er in einem Spezialfall die Transzendente (143) herleitet, diese Funktion über das eigentliche Übergangsgebiet hinaus (a. a. O., Fig. 4!).

und geht weiter über 1 hinaus, was wegen des Zusammenwirkens beider Übergänge verständlich ist. Der Wert $\frac{1}{2}$ liegt nahezu über der Mitte der Tangente, also ist in diesem Sinne die Signalzeit:

$$t_\alpha \approx t_m + 0{,}6 \sqrt{\frac{k_m''' x}{3!}}. \tag{146}$$



Gestalt der Signalfront, wenn die Hauptfrequenz in einem Tripelpunkt liegt
Fig. 21

Etwas verwickelter als bisher liegen die Verhältnisse, wenn nicht $\alpha = \omega_m$ ist, aber α so nahe ω_m liegt, daß der Quasilatenzübergang noch ganz innerhalb des Hauptübergangs liegt. Wie die numerische Rechnung (wieder mit $\varepsilon < 10$ Proz.) zeigt, ist das der Fall für:

$$K_{m\alpha}^* = |\omega_m - \alpha| \cdot \sqrt[3]{\frac{k_m''' x}{3!}} \lesssim 0{,}96; \tag{147}$$

innerhalb (147) gilt dann in guter Näherung:

$$K^*_{m\alpha} \approx \sqrt{\frac{1}{3}\frac{t_\alpha - t_m}{\sqrt[3]{\frac{k'''_m x}{3!}}}}. \tag{148}$$

Hier sind zwei charakteristische Parameter enthalten, die analog zu $\varkappa_m$ (136) sind, der zeitlich variable:

$$\varkappa_{m\alpha} = \frac{t - t_\alpha}{\sqrt[3]{\frac{k'''_{m\alpha} x}{3!}}} \tag{149}$$

und der konstante:

$$\varkappa^*_{m\alpha} = \frac{t_\alpha - t_m}{\sqrt[3]{\frac{k'''_{m\alpha} x}{3!}}} \approx 3\,(K^*_{m\alpha})^2, \tag{150}$$

wobei

$$k'''_{m\alpha} \approx k'''\left(\frac{\omega_m + \alpha}{2}\right). \tag{151}$$

Die Übergangsentwicklung (143), die wieder durch *KuIII*-Integration gewonnen wird, verallgemeinert sich dann zu:

$$\begin{aligned}
\frac{P_{hq}}{P_\alpha} = \frac{1}{3} &+ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2\pi\sqrt{3}}\left\{\frac{\varkappa_{m\alpha}}{1!} - \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{\varkappa^2_{m\alpha}}{2!} + i\sqrt{3\varkappa^*_{m\alpha}}\right)\right. \\
&- \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{\varkappa^4_{m\alpha}}{4!} + i\frac{\varkappa^2_{m\alpha}}{2!}\sqrt{3\varkappa^*_{m\alpha}} - \frac{3\varkappa^*_{m\alpha}}{2!}\right) \\
&+ \frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{\varkappa^5_{m\alpha}}{5!} + i\frac{\varkappa^3_{m\alpha}}{3!}\sqrt{3\varkappa^*_{m\alpha}} - \frac{\varkappa_{m\alpha}}{1!}\cdot\frac{3\varkappa^*_{m\alpha}}{2!}\right) \\
&+ \frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{\varkappa^7_{m\alpha}}{7!} + i\frac{\varkappa^5_{m\alpha}}{5!}\sqrt{3\varkappa^*_{m\alpha}} - \frac{\varkappa^3_{m\alpha}}{3!}\frac{3\varkappa^*_{m\alpha}}{2!}\right. \\
&\left.\left. - i\frac{\varkappa_{m\alpha}}{1!}\frac{(3\varkappa^*_{m\alpha})^{3/2}}{3!}\right) - \frac{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}(\ldots\ldots) - \ldots\right\}.
\end{aligned} \tag{152}$$

(152) ist sowohl bzgl. $\varkappa^*_{m\alpha}$ wie $\varkappa_{m\alpha}$ konvergent; die $\varkappa^*_{m\alpha}$ enthaltenden Glieder rühren von dem bei $\omega = \alpha$ für $t_\alpha > t_m$ wieder vorhandenen Glied 2. Ordnung her, das bei Ausführung der *Ku III*-Integration als das langsamer veränderliche in eine Potenzreihe entwickelt wurde. — Da für den Bereich der *Ku III*-Integration über den Pol (141) maßgeblich ist, der Bereich aber, in dem hierbei das Glied 3. Ordnung rascher veränderlich ist als das 2. Ordnung, nur etwa die durch (137) bestimmte Größe hat, also wegen (151) reichlich gerechnet:

$$\varkappa^*_{m\alpha} \lesssim 1{,}4, \tag{153}$$

ist es außerhalb (153), aber innerhalb (141) zweckmäßig, P_h wieder als *Ku II*-Integral über den Pol zu führen und dabei das Glied 3. Ordnung als langsamer veränderlich zu entwickeln. Dann erhält man als Resultat eine Verallgemeinerung von (130), die $\varkappa^*_{m\alpha}$ enthält und nach (105) hierin semikonvergent ist:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{P_h}{P_\alpha} = \frac{1}{2} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \Big\{ & \frac{\varkappa_\alpha}{1!} + \frac{i}{2}\left[\frac{\varkappa_\alpha^3}{3!} + (3\varkappa^*_{m\alpha})^{-3/4}\right] \\ & - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\left[\frac{\varkappa_\alpha^5}{5!} + \frac{\varkappa_\alpha^2}{2!}(3\varkappa^*_{m\alpha})^{-3/4}\right] \\ & - i\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2}\left[\frac{\varkappa_\alpha^7}{7!} + \frac{\varkappa_\alpha^4}{4!}(3\varkappa^*_{m\alpha})^{-3/4} + \frac{\varkappa_\alpha}{1!}(3\varkappa^*_{m\alpha})^{-6/4}\right] + \cdots \Big\}; \end{aligned}\right. \tag{154}$$

da hierbei noch nicht $\varkappa^*_{m\alpha}$ merklich $> 1{,}4$ ist [sonst könnte man wieder die einfachere Entwicklung (130) bzw. (128) benutzen], gilt näherungsweise:

$$\varkappa_\alpha = \frac{t - t_\alpha}{\sqrt{\frac{|k'_\alpha|\, x}{2!}}} \approx \frac{t - t_\alpha}{\sqrt[4]{\frac{k'''_m x\,(t_\alpha - t_m)}{2!}}}. \tag{155}$$

Praktisch vermitteln (152), (154) einen stetigen Übergang zwischen (143) und (128): Die Amplitude von P_α zur Zeit t_α liegt zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$, die Steilheit zwischen den Werten (144) und (131).

§ 13. Die Signalgeschwindigkeit als asymptotischer Begriff; „lange" und „kurze" Distanzen; Dispersionsmaß. Andeutende Behandlung kurzer Distanzen

Der Signalablauf in einem verlustfreien Kontinuum mit Latenzzeit ist jetzt in allen Phasen dargestellt, wenn man nach § 7 „genügend" große Tiefe x voraussetzt — was also

bekannt ist, ist die asymptotische Dispersionsverzerrung, auf die sich die Fragestellung hauptsächlich bezieht [vgl. § 5]. Es fehlen noch größenordnungsmäßige Angaben über die hierzu erforderliche Mindestgröße von x. Eng hiermit zusammenhängend ist die Frage nach der Größe der „Aufzeit" t_a bzw. T_a, der Grenze zwischen Vorlauf und Ablauf, als Funktion von x bzw. die Frage, von welcher Tiefe ab man berechtigt ist, von einer von der Kopfgeschwindigkeit verschiedenen Signalgeschwindigkeit (77) zu sprechen; da T_a der Beginn der asymptotischen Darstellung bzw. Ausführbarkeit der Sattelpunktsintegration ist und alle eingeführten asymptotischen Begriffe wie Signalzeit usw. diese zur Voraussetzung haben, sind dieselben, soweit sie mit α zusammenhängen, erst akut in Tiefen, wo:

$$T_\alpha > T_a \tag{156}$$

gilt, soweit sie mit einer Frequenz ω_m zusammenhängen, erst bei:

$$T_m > T_a. \tag{156a}$$

Die Schlüsselgröße ist also hierbei die Aufzeit. Nun ist aus dem Vorangehenden ersichtlich, daß diese Fragen, auf einen bestimmten Sattelpunkt ω_s bezogen, an eine genügende Größe von $\sqrt{\frac{|k_s''|x}{2!}}$, bzw. falls ω_s nahe einer Stelle ω_m liegt, von $\sqrt[3]{\frac{k_m''' x}{3!}}$ geknüpft sind. Diese Ausdrücke, die nach (81), (82), (123), (132), (142), (145) die asymptotische Frontverflachung eines ω_s-Einsatzsignals angeben, sind also repräsentativ für die durchlaufene „Länge" des Systems bzgl. der Frequenz ω_s und ermöglichen es, in diesem Sinne wenigstens qualitativ von „langen" und „kurzen" Distanzen x in Systemen zu sprechen; als Bezugsfrequenz wird bei einem stationären Signal, wenn nach der Existenz der asymptotischen Signalgrößen gefragt ist, die Frequenz α zu wählen sein — vgl. (156)!.

Zu einer quantitativen Diskussion wären allgemeine Zahlenangaben von der Art der in §§ 11, 12 eingeführten $\varkappa^{(0)}$-Größen erforderlich. Falls die Aufzeit kleiner als die kleinste Quasilatenzzeit ist, — was bei großer Tiefe x der Fall ist —, sind dieselben leicht zu machen, da dann nur die Sattelpunkte des

D_∞-Gebietes merkliche Beiträge liefern, also die Aufzeit als der Zeitpunkt definiert ist, von dem ab die Sattelpunktsintegration über diese ausführbar ist; das kommt nach (46), (47) auf die bekannte Frage hinaus, von wo ab die asymptotische Darstellung Besselscher Funktionen anwendbar ist. Im allgemeinen Falle hätten aber ohne spezielle Voraussetzungen über $k(\omega)$ numerische Aussagen über die Größe von T_a eine sehr komplizierte Form, während sie im Einzelfall relativ einfach zu gewinnen sind. Wir sehen daher hier von ihnen ab.

Zu ungefähren Größenangaben über die hauptsächlich interessierende Frage, wann (156) erfüllt ist, kommt man indessen durch die einfache Überlegung, daß die halbe Aufschaukelzeit notwendig kleiner sein muß als die Differenz zwischen Signal- und Latenzzeit. Bei einem Größenverhältnis derselben von $1:(1+c_1)$ — im allgemeinen kann c_1 merklich < 1 sein — gilt also nach (42), (77), (123):

$$2{,}3\sqrt{|k_a''|\,x} \lesssim \frac{1}{1+c_1}\left(k_a' - \frac{1}{v_k}\right)x\,,$$

bzw. falls α nahe einer Frequenz ω_m liegt, nach (142):

$$1{,}53\sqrt[3]{k_m''\,x} \lesssim \frac{1}{1+c_1}\left(k_m' - \frac{1}{v_k}\right)x\,.$$

Daraus erhält man für x die untere Schranke:

$$x_{\min} \sim \frac{5{,}3\,(1+c_1)^2\,|k_a''|}{\left(k_a' - \frac{1}{v_k}\right)^2} \tag{157}$$

$$x_{\min} \sim \frac{1{,}9\,(1+c_2)^{3/2}\,k_m'''^{1/2}}{\left(k_m' - \frac{1}{v_k}\right)^{3/2}}\,. \tag{158}$$

Kürzere Distanzen hätte man hiernach als kurz, längere als lang bezüglich α zu bezeichnen. Bei letzteren ist die entwickelte asymptotische Theorie sicher vom Hauptübergang ab anwendbar. Andererseits gibt, wieder für ein bestimmtes Frequenzgebiet, die reziproke rechte Seite von (157), (158) ein Maß für die Stärke der Dispersion des Systems. Für sehr hohe Frequenzen wird dieselbe nach (157) bei Benutzung von (41) proportional zu $\frac{b_2}{2\,v_k\,|\omega|}$; das steht in Einklang mit den Ergebnissen des Vorlaufs (§ 6), wonach dort die Dispersion die

mit $1/|\omega|$ wachsende Abweichung von $k(\omega)$ vom linearen Verlauf bedeutet.

Obgleich hier lange Distanzen, auf die sich die asymptotische Theorie bezog, der Fragestellung gemäß (vgl. § 5) das weit überwiegende Interesse besitzen, soll doch die Behandlung von kurzen wenigstens gestreift werden. Bei diesen ist es nicht etwa angängig, wie zuerst nahe läge, die Vorlaufentwicklung entsprechend weit auszudehnen. Denn diese geht, wie in § 6 gezeigt, von den sehr hohen Frequenzen aus; da aber hier $T_a > T_\alpha$ ist, sind bei bzw. nicht lange vor T_a für den Signalverlauf sicher die meisten und vor allem die im Signalspektrum am stärksten vertretenen Frequenzen maßgeblich: mathematisch würde sich das so äußern, daß dann die Vorlaufentwicklung in t (41) äußerst schlecht konvergent wäre. Es erscheint vielmehr sinngemäß, bei kurzen Distanzen zwischen Vorlauf und die erst zu verhältnismäßig späten Zeiten brauchbare asymptotische Entwicklung eine nach Potenzen von x fortschreitende einzuschalten, die hier den Hauptabschnitt des Signalverlaufs in handlicher Weise beschreiben würde.

Man kommt zu einer solchen durch Anwendung der in § 7 unter II. genannten Methode der Zerlegung in das Residuenintegral P_α (78) und die um die Verzweigungsschnitte (S-Gebiete) S_μ herumlaufenden Integrale J_μ. Dadurch, daß hierbei von Anfang an das stationäre Glied P_α auftritt, wird das Fehlen einer eigentlichen Signalzeit dokumentiert. Die „Eigenschwingungen“ J_μ:

$$J_\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(S_\mu)} \frac{e^{i(\omega t - kx)}}{\omega - \alpha} d\omega \tag{159}$$

lassen sich prinzipiell folgendermaßen berechnen: Bezeichnet man die zu S_μ gehörigen Grenzfrequenzen mit $\omega_{N\mu}$ und $\omega_{Z\mu}$, so kann man nach §§ 3, 4 schreiben:

$$k = -\, i\, k_\mu(\omega) \sqrt{\frac{\omega_{Z\mu} - \omega}{\omega - \omega_{N\mu}}}, \tag{160}$$

wobei $k_\mu(\omega)$ in S_μ und innerhalb der beiden angrenzenden D-Gebiete überall eindeutig und singularitätenfrei und auf der

reellen Achse reell und positiv ist. k_μ kann also von irgendeiner in einem gewissen Gebiet um

$$\omega_{M\mu} = \frac{\omega_{Z\mu} + \omega_{N\mu}}{2} \tag{161}$$

gelegenen Stelle $\omega_{0\mu}$ aus in eine in ganz S_μ absolut und gleichmäßig konvergente Potenzreihe entwickelt werden. — Man entwickelt nun (160):

$$J_\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(S_\mu)} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \alpha} \left(1 - ikx - \frac{k^2 x^2}{2!} \cdots\right) d\omega. \tag{160a}$$

Hieraus folgt formal durch gliedweise Integration die gesuchte Potenzentwicklung nach x:

$$J_\mu = c_{1\mu} x + c_{2\mu} x^2 + c_{3\mu} x^3 \cdots; \quad c_{k\mu} = c_{k\mu}(t) \tag{162}$$

mit

$$c_{2n+1;\mu} = \frac{1}{(2n+1)!} \left[\frac{\partial^{(2n+1)} J_\mu}{\partial x^{2n+1}}\right]_{x=0}$$

$$= \frac{i}{2\pi (2n+1)!} \oint\limits_{(S_\mu)} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \alpha} k_\mu^{2n+1}(\omega) \left[\frac{\omega_{Z\mu} - \omega}{\omega - \omega_{N\mu}}\right]^{n+1/2} d\omega.$$

Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (162) und Zulässigkeit der gliedweisen Integration folgt daraus, daß $c_{2n+1;\mu}$ im limes wie $\frac{1}{(2n)!}$ abnimmt, wie sich alsbald zeigen wird. — Da k^2 eine eindeutige Funktion ist, verschwinden in (162) alle c mit geradem Index außer $c_{2\mu}$, das durch das Residuum R_μ von k^2 bei $\omega_{N\mu}$ geliefert wird:

$$\begin{cases} c_{4\mu} = c_{6\mu} = c_{8\mu} \cdots = 0; \quad c_{2\mu} = -\dfrac{R_\mu}{2!} \dfrac{e^{i\omega_{N\mu} t}}{(\omega_{N\mu} - \alpha)}; \\ R_\mu = -(\omega_{Z\mu} - \omega_{N\mu}) k_\mu{}^2(\omega_{N\mu}). \end{cases} \tag{163}$$

In diesem Sinne kann man die Frequenzen $\omega_{N\mu}$ als „Eigenfrequenzen“ ansehen, wie ein an anderer Stelle durchgeführtes physikalisches Beispiel aus der Drudeschen Dispersionstheorie bestätigt. Für die ungeraden Indizes erhält man:

$$(164)\quad \begin{cases} c_{2n+1;\mu} = \dfrac{i}{2\pi(2n+1)!}\displaystyle\oint_{(s_\mu)} \frac{e^{i\omega t}}{\omega-\alpha} k_\mu^{2n+1}(\omega)\left[\frac{\omega_{Z\mu}-\omega}{\omega-\omega_{N\mu}}\right]^{n+1/2} d\omega \\ \qquad = \dfrac{i}{2\pi(2n+1)!}\displaystyle\oint_{(s_\mu)} G_\mu(\omega)\left[\frac{\omega_{Z\mu}-\omega}{\omega-\omega_{N\mu}}\right]^{n+1/2} d\omega \\ \text{mit}\quad G_\mu(\omega) = \dfrac{e^{i\omega t}}{\omega-\alpha} k_\mu^{2n+1}(\omega). \end{cases}$$

Die Auswertung von (164) geschieht praktisch mittels halbzahliger B-Funktionen (vgl. L 16). Mit der Substitution: $u = \dfrac{\omega-\omega_{N\mu}}{\omega_{Z\mu}-\omega}$ erhält man:

$$(164a)\quad \begin{cases} c_{2n+1;\mu} = \dfrac{i}{2\pi}\,\dfrac{\omega_{Z\mu}-\omega_{N\mu}}{(2n+1)!}\displaystyle\oint_{(0;1)} G_\mu \\ \qquad \cdot(\omega_{N\mu}+(\omega_{Z\mu}-\omega_{N\mu})u)\left(\frac{1-u}{u}\right)^{n+1/2} du. \end{cases}$$

Denkt man sich hierin G_μ von $\omega_{M\mu}$ (161), d. h. $u=\frac{1}{2}$ aus entwickelt, so kann man (164a) durch gliedweise Integration berechnen. Man erhält dann Integrale von der Form:

$$(165)\quad \begin{cases} \displaystyle\oint_{(0;1)}\left(\frac{1+u}{u}\right)^{n+1/2} u^k du = 2B\left(n+\frac{3}{2};\ n+\frac{1}{2}+k\right) \\ \qquad = 2\,\dfrac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma(k+2)} \\ \qquad = (-1)^{n-k}2\pi\,\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(n-k+\frac{1}{2}\right)}{(k+1)!} \\ \qquad = (-1)^{n-k}\,\dfrac{2\pi}{k+1}\binom{n+1/2}{k} \end{cases}$$

(vgl. L 16); speziell für $k=0$:

$$(165a)\qquad \oint_{(0;1)}\left(\frac{1-u}{u}\right)^{n+1/2} du = (-1)^n 2\pi\left(n+\tfrac{1}{2}\right).$$

Auf die Ausrechnung im einzelnen wird nunmehr verzichtet; hingewiesen sei nur auf die Form des Ergebnisses. Dabei sei berücksichtigt, daß $G_\mu(\omega)$ in (164) allgemein von einer beliebigen geeigneten in einer gewissen Umgebung von

$\omega_{M\mu}$ gelegenen Stelle $\omega_{0\mu}^{(n)}$ entwickelt werden kann (vgl. oben); in (164a) ist speziell $\omega_{M\mu}$ selbst gewählt. Es wird dann allgemein:

$$c_{2n+1;\mu} = i(-1)^n \frac{n+\frac{1}{2}}{(2n+1)!} \frac{k_{0\mu}^{(n)} e^{i\omega_{0\mu}^{(n)} t}}{\omega_{0\mu}^{(n)} - \alpha} g_{0\mu}^{(n)}(t), \tag{166}$$

worin $k_{0\mu}^{(n)} = k_\mu^{2n+1}(\omega_{0\mu}^{(n)})$ und $g_{0\mu}^{(n)}(t)$ das in Form einer gleichmäßig konvergenten Reihe erscheinende Resultat der gliedweisen Integration bedeutet. Als Gesamtergebnis erhält man also:

$$\left\{\begin{aligned} &P = P_a + \sum_{\mu=1}^{2r} J_\mu \quad [2r = \text{Grad von } N(\omega)]; \\ &J_\mu = -\frac{R_\mu e^{i\omega_{N\mu} t}}{\omega_{N\mu} - \alpha} \cdot \frac{x^2}{2!} \\ &\quad + i \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{n+\frac{1}{2}}{(2n+1)!} \frac{k_{0\mu}^{(n)} e^{i\omega_{0\mu}^{(n)} t}}{\omega_{0\mu}^{(n)} - \alpha} g_{0\mu}^{(n)}(t) \cdot x^{2n+1} \right\}. \end{aligned}\right. \tag{167}$$

Diese Form deutet eine Verallgemeinerung der Heavisideschen Entwicklungsformel auf verzweigte Stammfunktionen (vgl. L 3) an; allerdings ist der Begriff der „Eigenfrequenzen“ hier nur für die Frequenzen $\omega_{N\mu}$ evident, da die $\omega_{0\mu}^{(n)}$ in einem endlichen Gebiet kontinuierlich verteilt und beliebig wählbar liegen.

Für sehr einfache mittelkurze Systeme sei noch auf ein viel elementareres — allerdings hauptsächlich bei diskontinuierlichen Systemen zweckmäßiges — Integrationsverfahren hingewiesen, bei dem der ursprüngliche Weg längs (unterhalb) der reellen Achse beibehalten und dabei der Beitrag der S-Gebiete vernachlässigt wird. Die Integrale längs der D-Gebiete werden dann einfach durch lineare Annäherung von $k(\omega)$ genommen, führen also auf den Integralsinus. Hierzu sei auf Küpfmüller (L 12) verwiesen, der zuerst so vorgegangen ist.

In dem besonders einfachen Fall, daß bei $\varrho = 1$ $R(\omega)$ eine ganze Funktion zweiten Grades ist [„homogener Kettenleiter von 1 Freiheitsgrad“], kann das Grundintegral (29) bei

beliebigen Werten von x, t mittels Besselscher Funktionen ausgewertet werden; wir übergehen hier die einfache Ausrechnung, da dieser Fall, der bei der Frage der Verzerrung drahtloser Zeichen in der Heavisideschicht eine Rolle spielt, an anderer Stelle behandelt werden soll. Das Analoge ist bei diskontinuierlichen Systemen der Fall (vgl. L. 3, S. 123 f).

Im folgenden beschränken wir uns wieder auf lange Distanzen.

§ 14. Übertragung auf verlustfreie Kontinua ohne Latenzzeit

(Quasistationäre Näherung)

Die Ergebnisse der §§ 6—13 lassen sich, da sie vom Grad ϱ von $k(\omega)$ (28) nicht abhingen, sofort auf Kontinua übertragen, bei denen $\varrho = 0$ oder $\varrho = -1$ ist, abgesehen von den Aussagen, die sich auf das D_∞-Gebiet bzw. den Vorlauf bezogen, da hier $\varrho = 1$, nach § 6 mit der Latenzzeitbedingung identisch, wesentlich war. Die Vorlaufentwicklung (44), (46), (47) überträgt sich aber — nach entspr. Umbenennung der eingehenden Koeffizienten — ihrer Herleitung gemäß unmittelbar auf die Fälle $\varrho = 0$ und $\varrho = -1$, wenn man t an Stelle von $\mathfrak{t} = t - t_0$ schreibt: Das Signal setzt wegen der quasistationären Näherung: $v_k = \infty$ [(42)] auch für $x \neq 0$ mit $t = 0$ ein. Allerdings besteht ein wesentlicher Unterschied: Der hinzutretende Faktor (48) $e^{-\text{const}\,x}$, der dort nur durch Dämpfungsverluste veranlaßt sein konnte, also nach Voraussetzung von relativ geringer Wirkung war, kann hier durch Energiereflexion verursacht und dann ausschlaggebend werden; das ist der Fall, wenn $\omega = \infty$ in einem S-Gebiet liegt. Dann hat infolge des Ausfalls des D_∞-Gebietes der *gesamte* Signalverlauf eine Quasilatenzzeit, nämlich die kleinste aller D-Gebiete.

Zwecks Übersicht über alle diesbezüglichen Möglichkeiten sei zunächst der Fall $\varrho = 0$ betrachtet. Hier ist: $\lim\limits_{\omega \to \infty} R(\omega) = C$; im Falle $C > 0$ ist $\omega = \infty$ in einem D-Gebiet, bei $C < 0$ in einem S-Gebiet gelegen. Die höchste Grenzfrequenz ist dann im einen Falle eine Stelle ω_Z, im anderen eine Stelle ω_N; da hier gleich viel von beiden Arten vorhanden sind, muß $\omega = 0$ ebenfalls in einem D-Gebiet bzw. S-Gebiet liegen, das, falls

$\omega = 0$ Doppelpol oder Doppelwurzel ist, auf 0 zusammenschrumpft. Im Falle $C > 0$ setzt das Signal sofort mit merklicher Amplitude und einer zu x proportionalen Phasenverschiebung ein, bei $C < 0$ erst zur kleinsten Quasilatenzzeit. [Zum Verlauf des Sattelpunktsweges sei noch bemerkt, daß im Falle einer höchsten Grenzfrequenz ω_N die Fortsetzung des Gefälleweges ins Unendliche von dort über einen der beiden Nebensattelpunkte (Fig. 9) führt, und zwar, wie man zeigt, über den in der oberen Halbebene des unteren Blattes gelegenen — der Weg durch ∞ läuft dann also wie hier die Hälfte des Vorlaufweges im unteren Blatt! Praktisch ist der Nebensattelpunkt wegen seines exponentiell verschwindenden Beitrages ohne Bedeutung]. Bei $\varrho = -1$ ist ein Paar Grenzfrequenzen ω_N mehr vorhanden als ω_Z, so daß $\omega = \infty$ in einem S-Gebiet, $\omega = 0$, falls keine Doppelwurzel oder Doppelpol, in einem D-Gebiet liegt. Da indessen hier $\lim_{\omega \to \infty} R(\omega) = 0$ ist, fällt der Dämpfungsfaktor beim Vorlauf fort, so daß in genügender Tiefe x zur Zeit $t = 0$ sofort eine kleine aber merkbare Amplitude anklingt, indessen rasch wieder bis auf exponentiell kleine Werte verklingt; erst nach der endlichen Zeit $(t_m)_{\min}$ kommt sie wieder zu merkbaren Werten. Man kann sich dieses Verhalten daraus erklären, daß der Fall $\varrho = -1$ nach (20) asymptotisch einer kontinuierlichen Kondensatorkette äquivalent ist; diese wirkt im Gegensatz zu ihrem diskontinuierlichen Schwestergebilde für die höheren Frequenzen sperrend, bei sehr hohen Frequenzen aber geht die Sperrwirkung wegen der „Kondensatorwirkung“ gegen 0. — Physikalisch dürfte der Fall $\varrho = -1$ bei kontinuierlichen Systemen, auch näherungsweise, nur schwer zu realisieren sein.

Zusammenfassung

Es läßt sich zeigen, daß linear-homogene dispergierende Systeme allgemein die Eigenschaft haben, daß ihr Fortpflanzungsmaß als komplexe Funktion nur Verzweigungsstellen 2. Ordnung hat. Physikalisch bedeutet das bei Verlustfreiheit die abwechselnde Folge von Intervallen längs der reellen Frequenzachse, in denen entweder nur harmonische oder nur exponentielle Wellenfortpflanzung stattfinden kann, von soge-

nannten Durchlässigkeits- und Sperrgebieten. Speziell für kontinuierliche Systeme, den besonderen Gegenstand dieser Arbeit, lassen sich einige fundamentale Dispersionssätze beweisen, die viel weitergehende Aussagen über das Fortpflanzungsmaß derselben machen. Auf Grund deren ist es möglich, eine allgemeine Theorie der Ausbreitung von nichtstationären Vorgängen (Signalen) in solchen Systemen zu entwickeln. Dabei ist von besonderem Interesse der asymptotische Charakter der Dispersionsverzerrungen, der bei genügend starker Dispersion bzw. nicht zu geringer Eindringtiefe für die Signalfortpflanzung maßgeblich ist. Er ist physikalisch durch eine Aufspaltung des Signals in seine Spektralkomponenten gekennzeichnet, die sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen. Mit der Kopfgeschwindigkeit pflanzen sich nur die sehr hohen Frequenzen fort und bewirken dadurch die — bis auf einen eventuellen Dämpfungsfaktor — unverzerrte Fortpflanzung des Signalkopfes. Bei allen anderen gibt diese Aufspaltung Veranlassung zur Ausbildung einer „Signalgeschwindigkeit", die kleiner als die Kopfgeschwindigkeit ist und speziell in den hier behandelten verlustfreien Systemen identisch mit der Gruppengeschwindigkeit ist, ferner bei Signalen mit plötzlich einsetzender stationärer Frequenz zu einer Frontverflachung bzw. Aufschaukelzeit. Allgemeine Aussagen über die Signalgeschwindigkeiten der verschiedenen Partialfrequenzen machen die fundamentalen Dispersionssätze. Aus ihnen ergibt sich insbesondere, daß jedes Durchlässigkeitsgebiet eine sogenannte „Quasilatenzzeit" besitzt, vor der der Beitrag aller seiner Frequenzen zum Signalablauf verschwindend klein ist.

Die allgemeine Theorie gibt die quantitative Definition dieser für die Signalfortpflanzung charakteristischen Größen und liefert für dieselben einfache Formeln sowie einfache analytische Ausdrücke für den asymptotischen Signalablauf zu jeder beliebigen Zeit; diese beziehen sich auf (im eingangs genannten Rahmen) beliebige Systeme, sind aber auf den Einzelfall unmittelbar anwendbar. Endlich ist es möglich, den Begriff der „Distanz" in einem System bzw. seiner „Dispersion" im asymptotischen Sinne zu definieren. Die „kurzen" Distanzen, deren Behandlung u. U. rechnerisch komplizierter, aber im Wesen elementarer ist, werden hier nur gestreift.

Die mathematische Durchführung liegt ausschließlich auf funktionentheoretischem Gebiet; speziell wird weitgehend von der Methode der Sattelpunktsintegration, großenteils in der hier verallgemeinerten Form, Gebrauch gemacht.

Es bedeutet für mich eine besondere Freude, an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Noether, Breslau, für zahlreich empfangene Anregung und Unterstützung meinen tiefsten Dank sagen zu können.

Literatur

1) L. Brillouin, Ann. d. Phys. [4], **44**. S. 177. 1914.
2) G. A. Campbell, The Bell Syst. Techn. Journ., Nov. 1922.
3) J. R. Carson, Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung (übers. v. Ollendorf u. Pohlhausen). Springer 1929.
4) W. Cauer, Arch. f. Elektrot. **17**. H. 4. 1926.
5) W. Cauer, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. **33**. 1927.
6) W. Cauer, E.N.T. **6**. S. 272. 1929.
7) Courant-Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik. Springer 1925.
8) P. Debye, Math. Ann. **67**. S. 535. 1909.
9) H. Edler, Arch. f. Elektrot. **23**. S. 1. 1929.
10) K. Försterling, Lehrbuch der Optik. Hirzel 1928.
11) R. M. Foster, The Bell Syst. Techn. Journ., April u. Juli 1924.
12) K. Küpfmüller, E.N.T. **1**. S. 141. 1924.
13) K. Küpfmüller, Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern **5**. S. 51. 1926.
14) K. Küpfmüller, E.N.T. **5**. S. 18. 1928.
15) W. P. Mason, The Bell Syst. Techn. Journ. **6**. S. 258. 1927.
16) N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Teubner 1906.
17) F. Noether, in Riemannn-Weber, Differential- und Integralgleichungen der Physik, **2**. Abschn. 3. Vieweg 1927.
18) F. Ollendorff, Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik. Springer 1926.
19) F. Pollaczek, E.N.T. **1**. S. 80. 1924.
20) F. Pollaczek, E.N.T. **2**. S. 197. 1925.
21) F. Pollaczek, Zsr. f. techn. Phys. **9**. S. 265. 1928.
22) F. Pollaczek, Ann. d. Phys. [5] **2**. S. 991. 1929.
23) E. J. Routh, Dynamik der Systeme starrer Körper, Teubner
24) S. Schafheitlin, Theorie der Besselschen Funktionen. Teubner 1908.
25) A. Sommerfeld, Heinrich-Weber-Festschrift S. 338. 1912.

26) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. [4] **44.** S. 177. 1914.
27) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. [4] **28.** S. 665. 1909.
28) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. [4] **81.** S. 1153. 1926.
29) A. Sommerfeld, Riemann-Weber, Differential- und Integralgleichungen der Physik, **2.** Abschn. 4. Vieweg 1927.
30) G. W. Stewart, Phys. Rev. **20.** S. 528. 1922.
31) G. W. Stewart, Phys. Rev. **25.** S. 90. 1925.
32) Strecker u. Feldkeller, Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern, **8.** S. 2. 1929.
33) Strecker u. Feldkeller, E.N.T. **6.** S. 93. 1929.
34) Trendelenburg, Lübcke, Handbuch d. Physik, **8.** Kap. 13 bzw. 15.
35) K. W. Wagner, Arch. f. Elektrot. **2.** S. 315. 1915.
36) K. W. Wagner, Arch. f. Elektrot. **4.** S. 172. 1916.
37) K. W. Wagner, Arch. f. Elektrot. **8.** S. 61. 1919.
38) K. W. Wagner, Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern **2.** S. 189. 1922.
39) K. W. Wagner, E.N.T. **5.** S. 1. 1928.
40) F. Wallot, Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern **8.** 1929.
41) H. Weyl, Ann. d. Phys. [4] **60.** S. 481. 1919.

Lebenslauf

Ich, Hans Georg Baerwald, wurde am 5. April 1904 als Sohn des Kaufmanns Martin Baerwald und seiner Ehefrau Elsa zu Breslau geboren. Seit Ostern 1910 besuchte ich das dortige König-Wilhelms-Gymnasium, das ich Ostern 1922 mit dem Reifezeugnis verließ. Ich arbeitete dann 16 Monate praktisch bei den Linke-Hofmann-Werken in Breslau. Michaelis 1923 ließ ich mich an der Technischen Hochschule zu Breslau in der Fakultät für Maschinenwirtschaft immatrikulieren, ging aber ein Semester darauf zur Fakultät für Allgemeine Wissenschaften, Fachrichtung Physik über. Mein Vorexamen bestand ich im Herbst 1925, mein Diplomexamen Ostern 1928, wozu ich eine Arbeit über rückgekoppelte Widerstandsverstärker vorwies, die im Physikalischen Institut der Hochschule angefertigt wurde. Meine Ausbildung verdanke ich vorwiegend den Herren Noether, Waetzmann, Schmeidler, Eucken und Hilpert.

Seit dem Sommersemester 1928 war ich bei Herrn Prof. Dr. Noether (Lehrstuhl für höhere Mathematik) als außerplanmäßiger Assistent für theoretische Physik tätig. Seit Herbst 1928 war ich mit der Durchführung der vorliegenden Untersuchung beschäftigt, die ich im Dezember 1929 zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs einreichte.